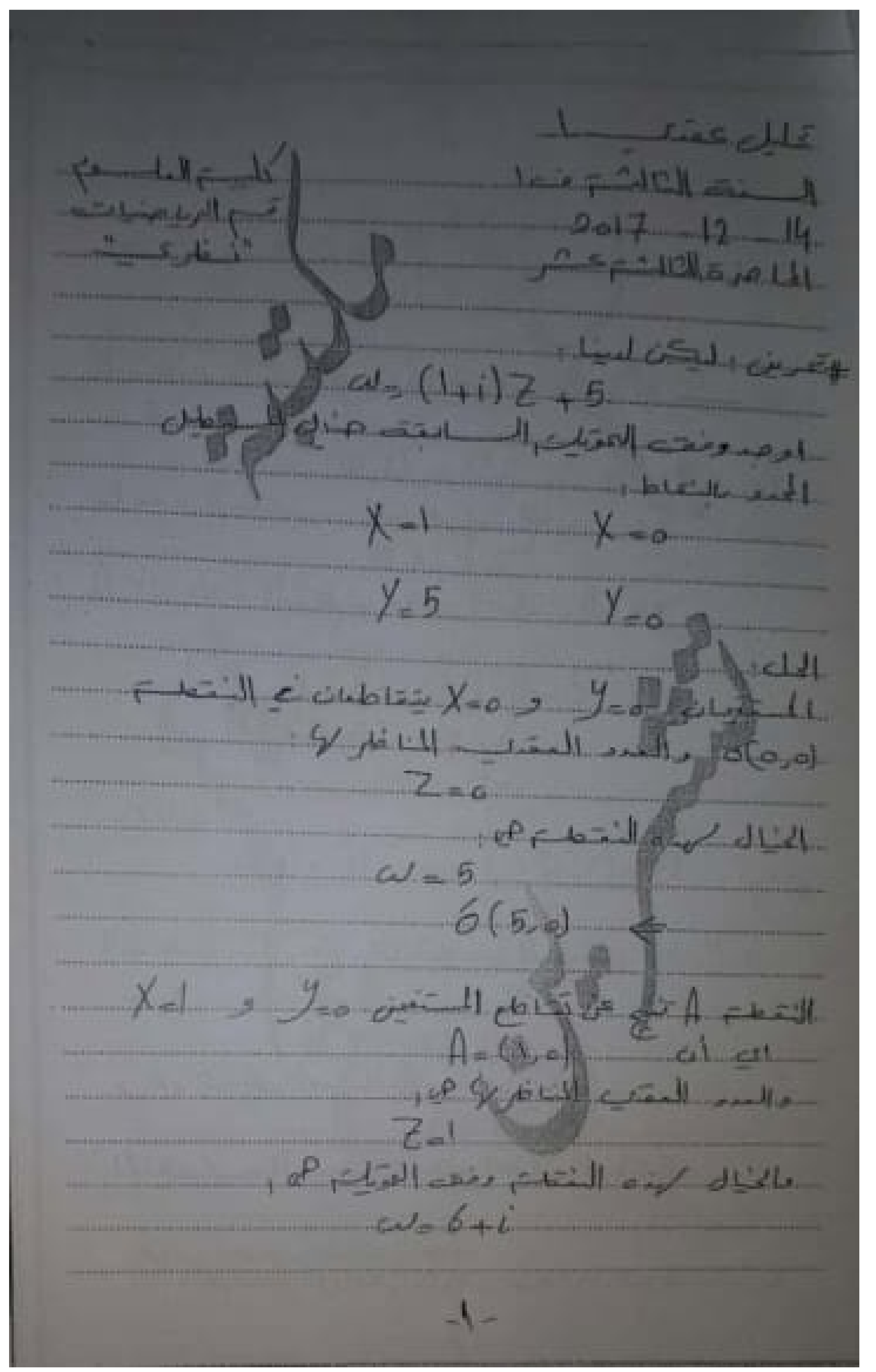


تحليل عقدي

السنة الثالثة فصل

14 - 12 - 2017

المحاضرة الثالثة عشر

كلية العلوم

قسم الرياضيات

"نظرية"

تمرين: ليكن لدينا:

$w = (1+i)Z + 5$

أوجد صورة المستقيمات السابقة في المستوي

المحدد بالنقاط:

$X=0 \qquad X=1$

$Y=0 \qquad Y=5$

الحل:

المستقيمان $y=0$ و $x=0$ يتقاطعان في النقطة $O(0,0)$ والعدد العقدي المناظر لـ

$Z=0$

الخيال لهذه النقطة هو:

$w=5$

$O(5,0)$

النقطة A تنتج عن تقاطع المستقيمين $y=0$ و $x=1$

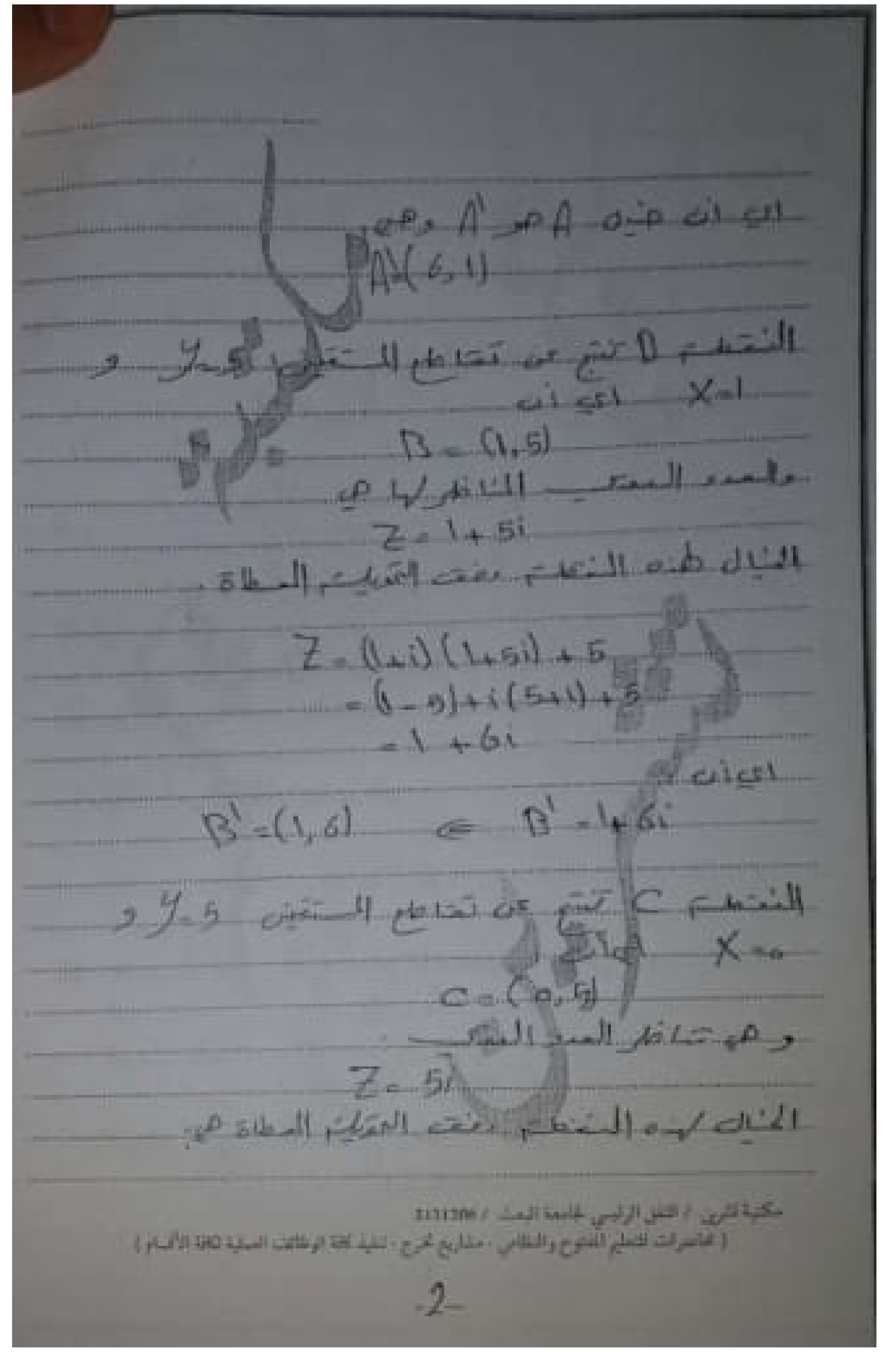
أي أن $A=(1,0)$

والعدد العقدي المناظر لها هو:

$Z=1$

والخيال لهذه النقطة وفق التحويل هو:

$w=6+i$



أي أن صورة A هو A' وهي

$A'(6,1)$

النقطة B تنتج من تقاطع المستقيمين $y=5$ و $x=1$ أي أن

$B=(1,5)$

والعدد المركب المناظر لها هي

$Z=1+5i$

المثال لهذه النقطة تحت التحويل المعطاة.

$Z=(1+i)(1+5i)+5$

$=(1-5)+i(5+1)+5$

$=1+6i$

أي أن

$B'=(1,6) \Leftarrow B'=1+6i$

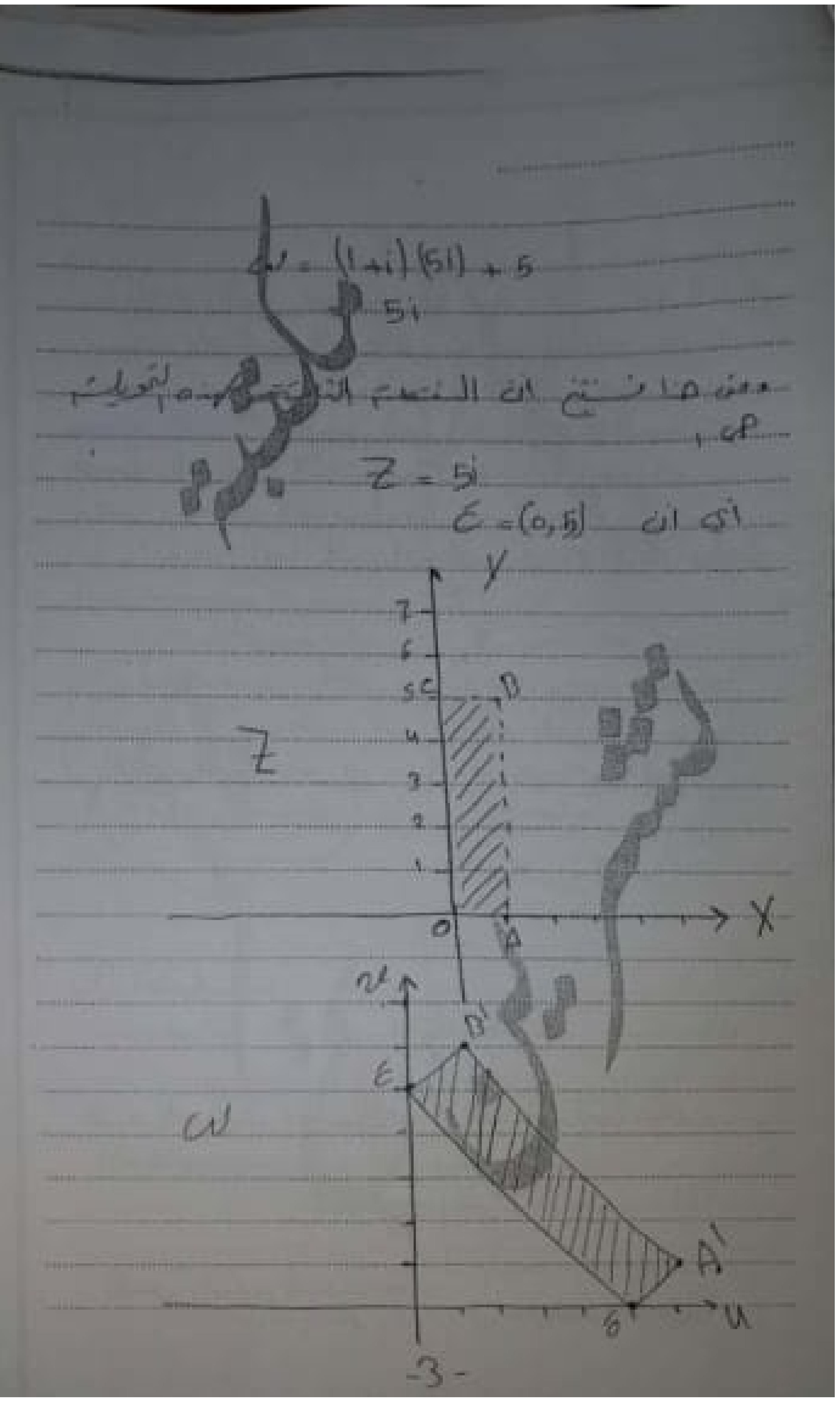
النقطة C تنتج من تقاطع المستقيمين $y=5$ و $x=0$ أي أن

$C=(0,5)$

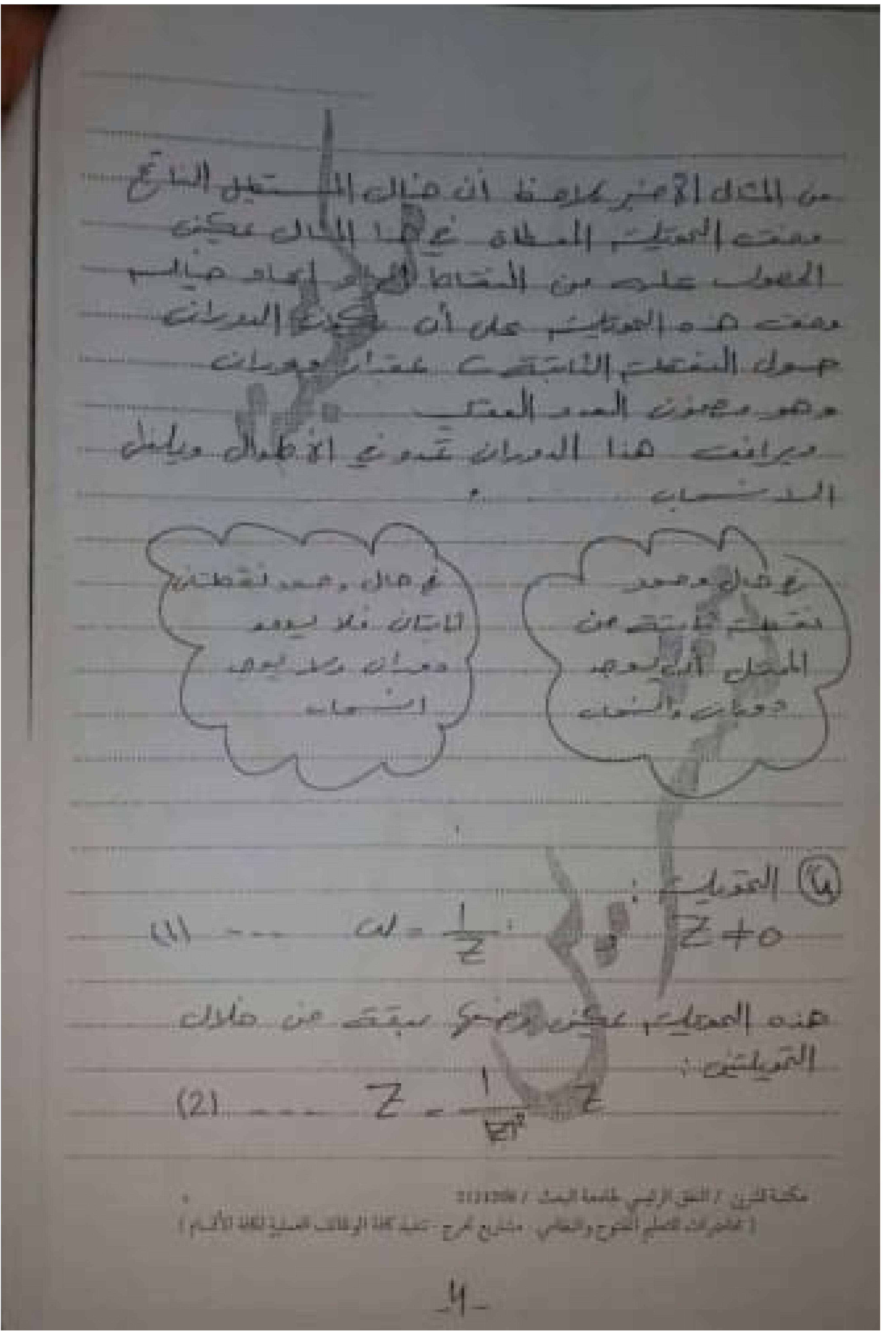
وهي تناظر العدد المركب

$Z=5i$

المثال لهذه النقطة تحت التحويل المعطاة هي



$w = (1+i)(5i) + 5$
$= 5i$
ومن هنا نستنتج أن المنحنى الناتج هو التحليل
كما
$Z = 5i$
أي أن $E = (0,5)$
y
7
6
5 C
B
4
3
2
1
Z
0
A
X
v
B'
E
w
A'
6
u
-3-



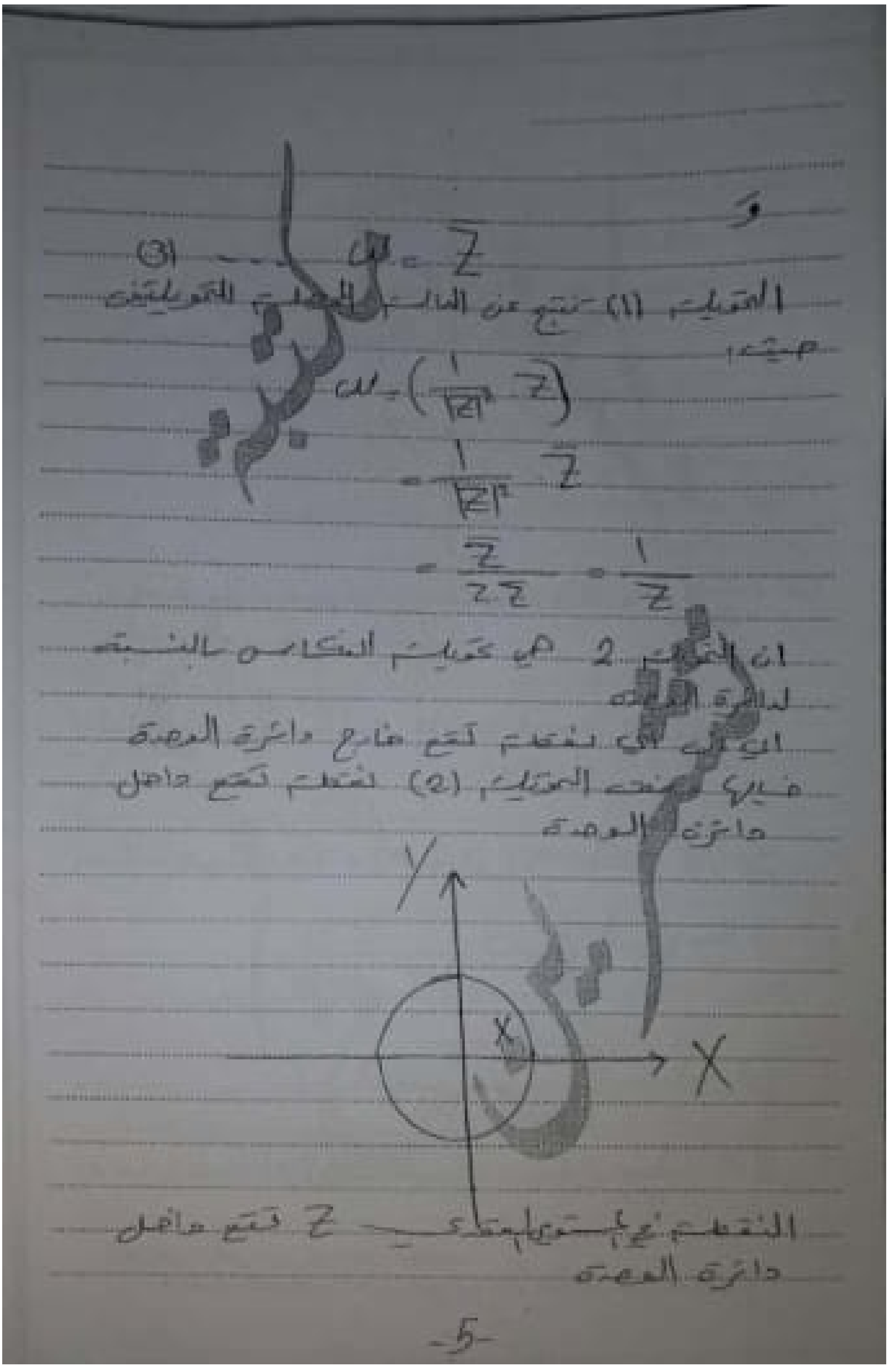
من المثال الأخير نلاحظ أن خيال المستقيم الناتج بعمل التحويل المعطى في هذا المثال يكون الحصول على من النقاط التي تم إيجاد خيالها بعمل هذا التحويل على أن يكون الدوران حول النقطتين الثابتتين عكس عقارب الساعة وهو محصور العدد المعقد ويرافق هذا الدوران تمدد في الأطوال ويمثل التشابه.

④ التحويل:

$$z \neq 0 \quad , \quad w = \frac{1}{z} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

هذه التحويل يمكن أن نفسر ببسط من خلال التحويلين:

$$Z = \frac{1}{\bar{z}} \quad , \quad Z \quad \ldots\ldots \quad (2)$$



و

$\bar{Z} = w$ ——— (3)

التحويل (1) ينتج عن الحاصل ... التحويلتين حيث:

$w = \left(\frac{1}{|z|^2}\, z\right)$

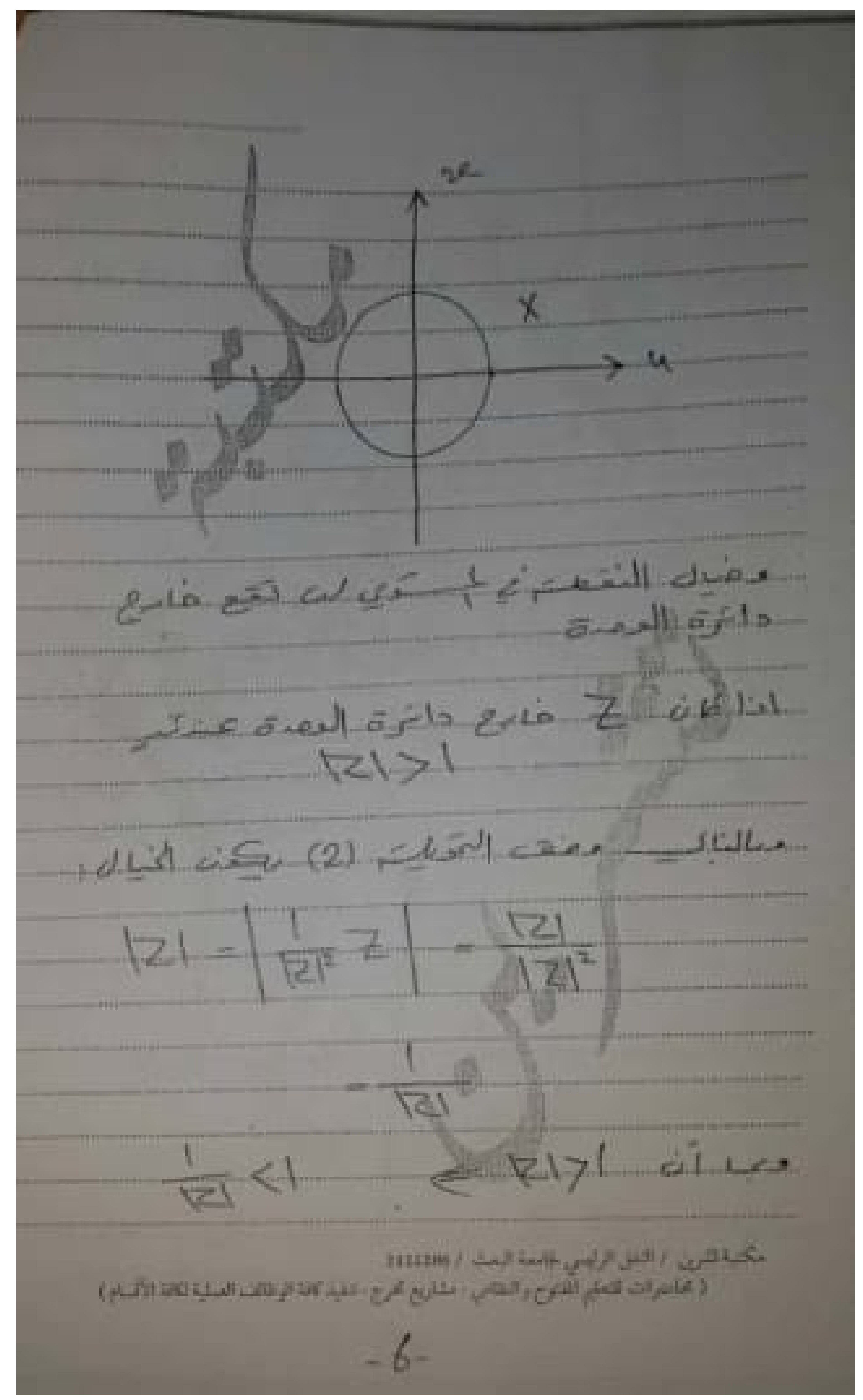
$= \frac{1}{|z|^2}\, \bar{z}$

$= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$

أي أن التحويل 2 هي تحويل التعاكس بالنسبة لدائرة الوحدة

أي أن النقاط تقع خارج دائرة الوحدة فإنه ينعكس التحويل (2) لنقاط تقع داخل دائرة الوحدة

النقطة تحت تأثير التعاكس ـــ z تقع داخل دائرة الوحدة



مضيل النقط في المستوي لا تقع خارج دائرة الوحدة

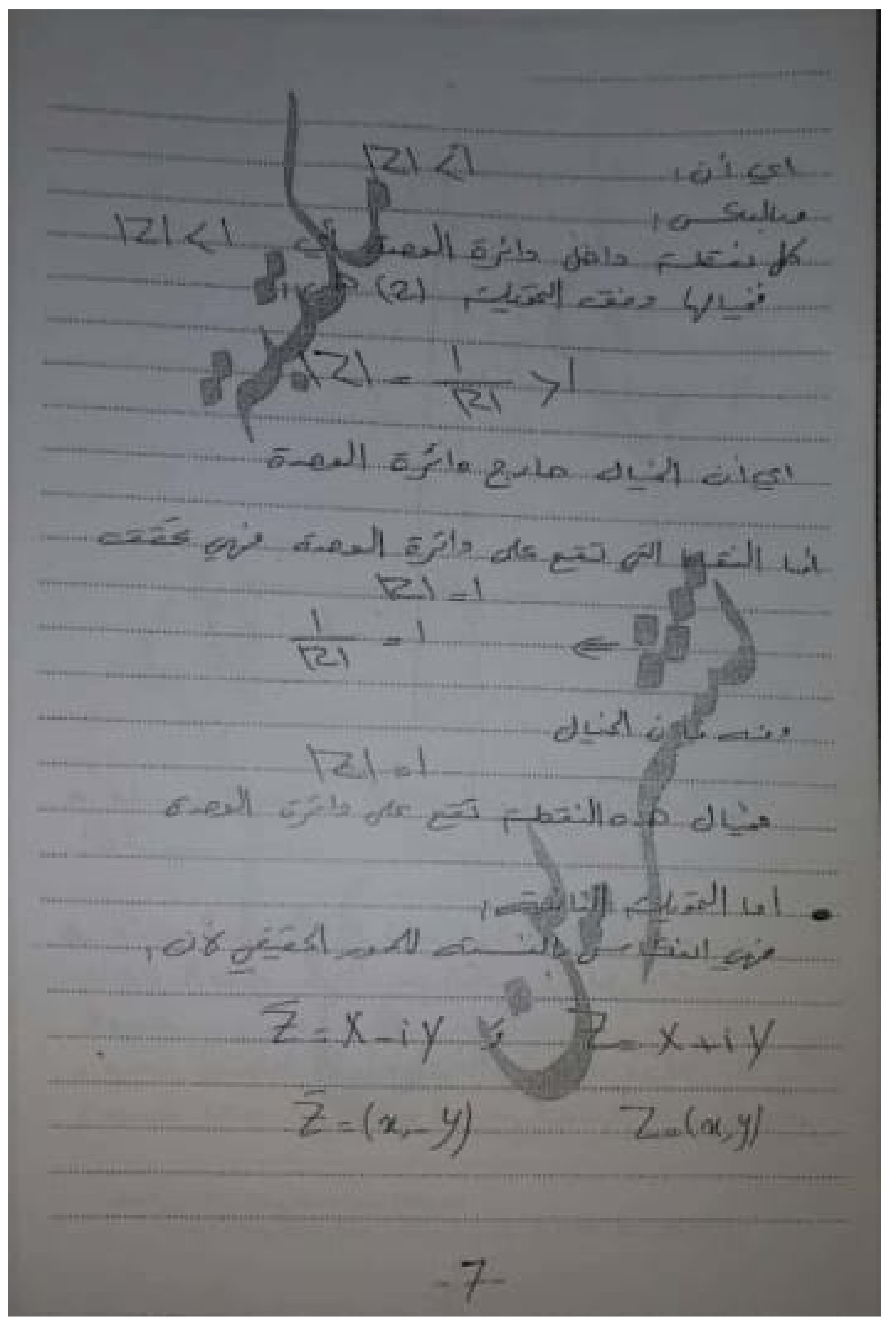
اذا كان z خارج دائرة الوحدة عندئذ $|z|>1$

مثال: من التمارين (2) يمكن الخيال

$$|z| = \left|\frac{1}{|z|^2} z\right| = \frac{|z|}{|z|^2}$$

$$= \frac{1}{|z|}$$

بما أن $|z|>1$ فإن $\frac{1}{|z|}<1$



اي أن: $|z| \geq 1$

وبالعكس:

كل نقطة داخل دائرة الوحدة $|z| < 1$

خيالها وفق التحويل (2) هو

$$1 < \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$$

اي ان الخيال خارج دائرة الوحدة

اما النقط التي تقع على دائرة الوحدة فهي تحقق

$|z| = 1$

$$\Leftarrow \quad 1 = \frac{1}{|z|}$$

ومنه فان الخيال

$|z| = 1$

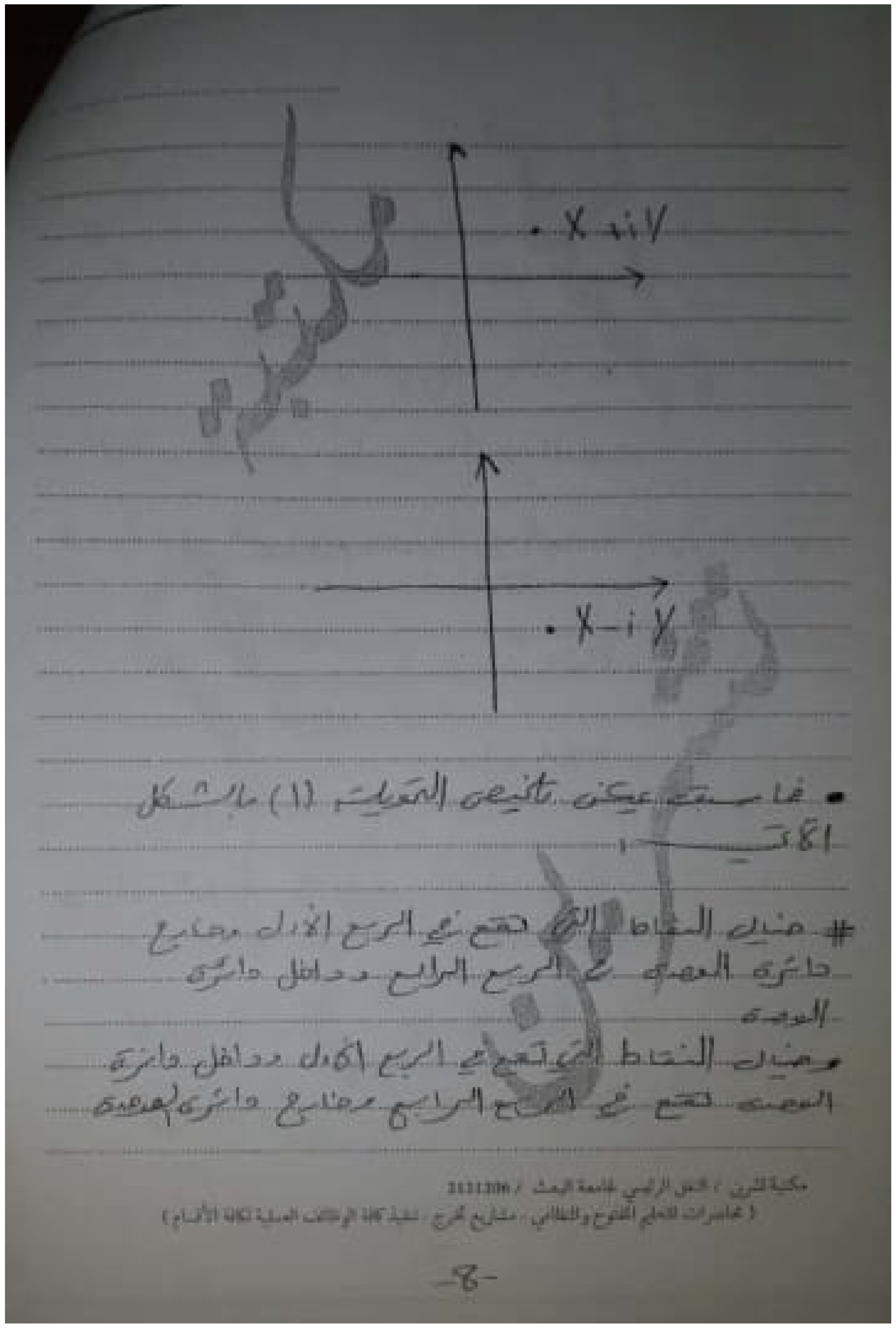
فخيال هذه النقط تقع على دائرة الوحدة

• اما التحويل الثالث:

فهو التناظر بالنسبة للمحور الحقيقي لان:

$\bar{z} = x - iy$ و $z = x + iy$

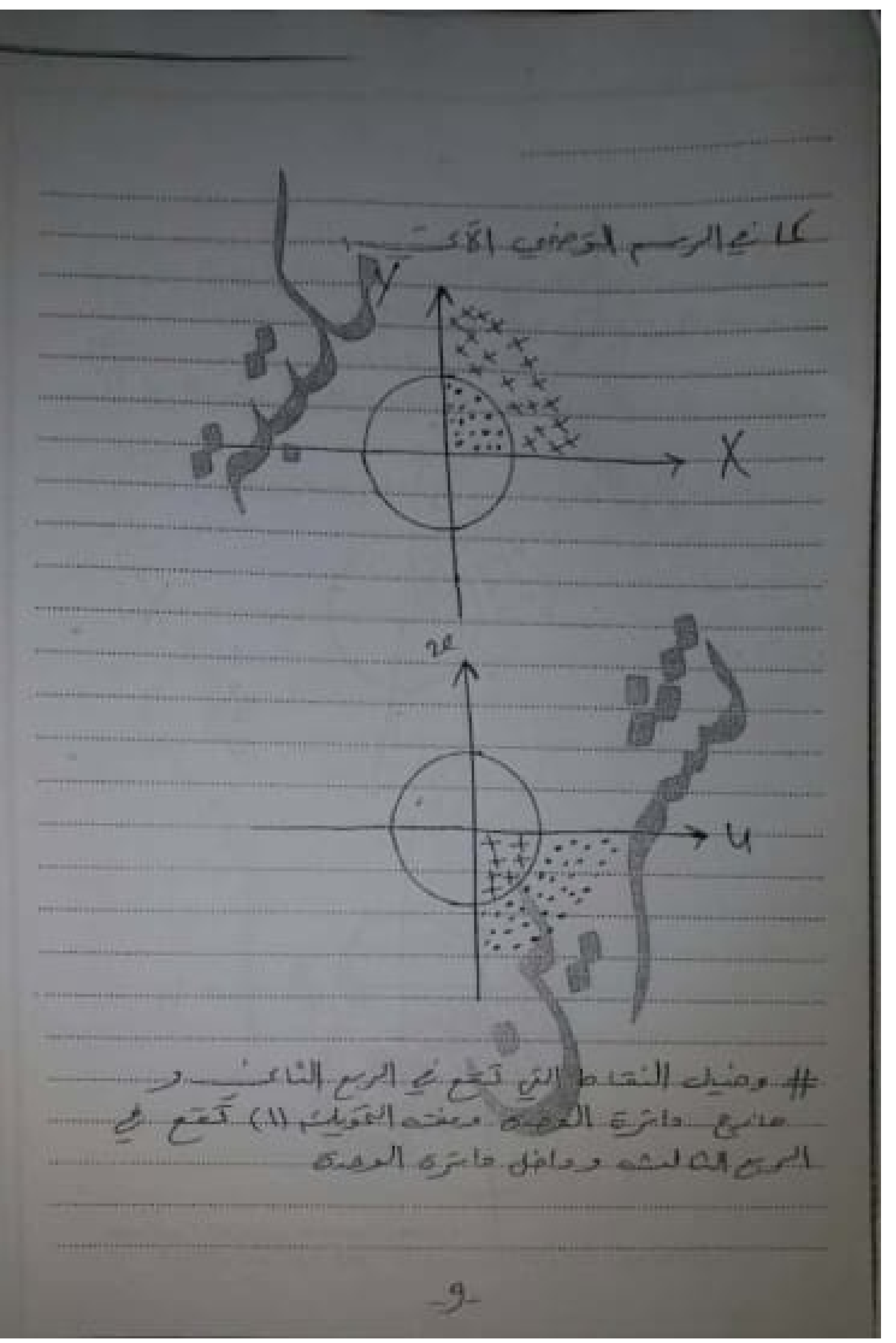
$\bar{z} = (x, -y)$ $\quad$ $z = (x, y)$



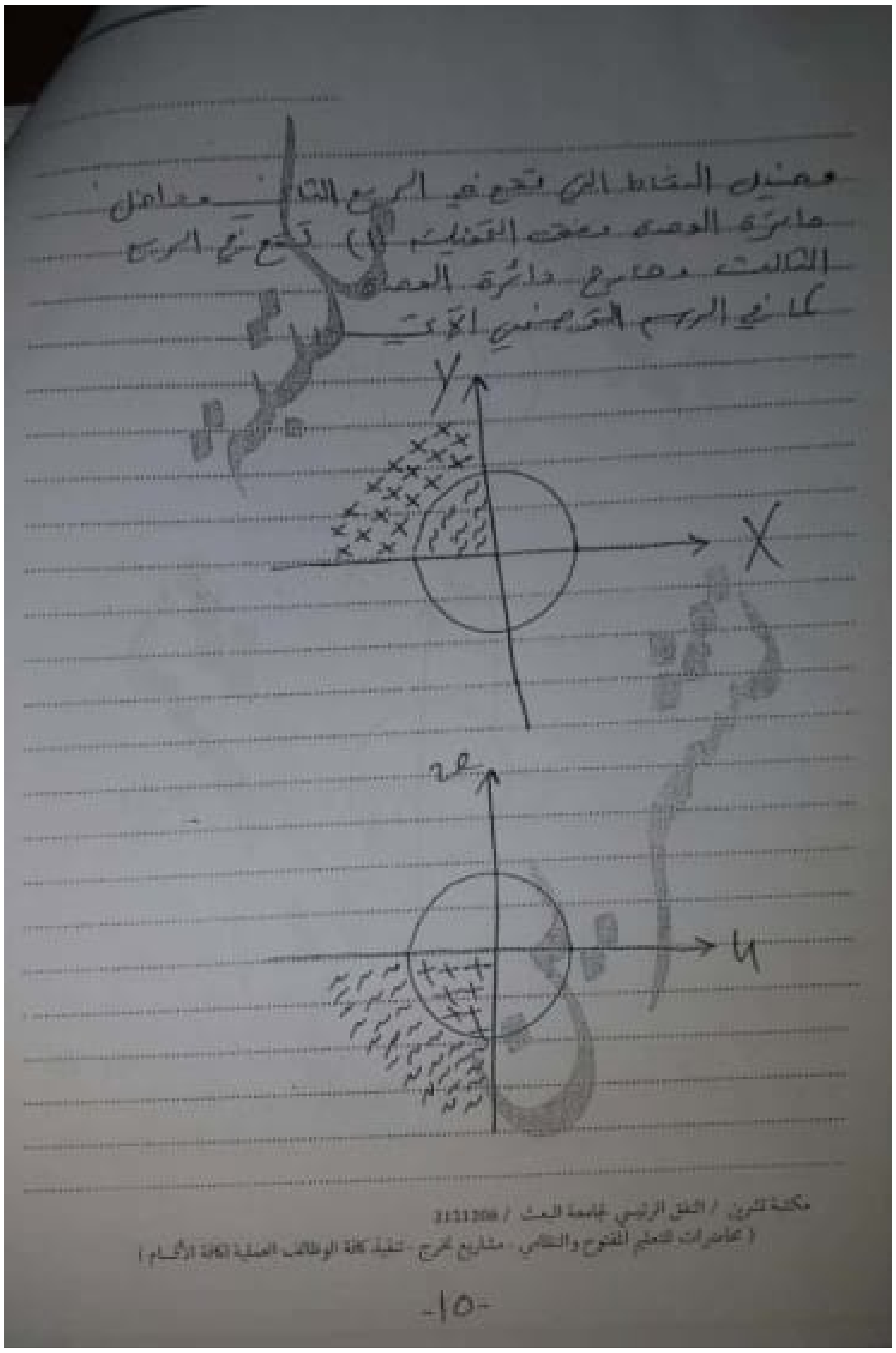
• مما سبق يمكن تلخيص التعريف (1) بالشكل الآتي

هناك النقاط التي تقع في الربع الأول خارج دائرة الوحدة في الربع الرابع داخل دائرة الوحدة

• وهناك النقاط التي تقع في الربع الأول داخل دائرة الوحدة تقع في الربع الرابع خارج دائرة الوحدة


كما في الرسم التوضيحي الآتي

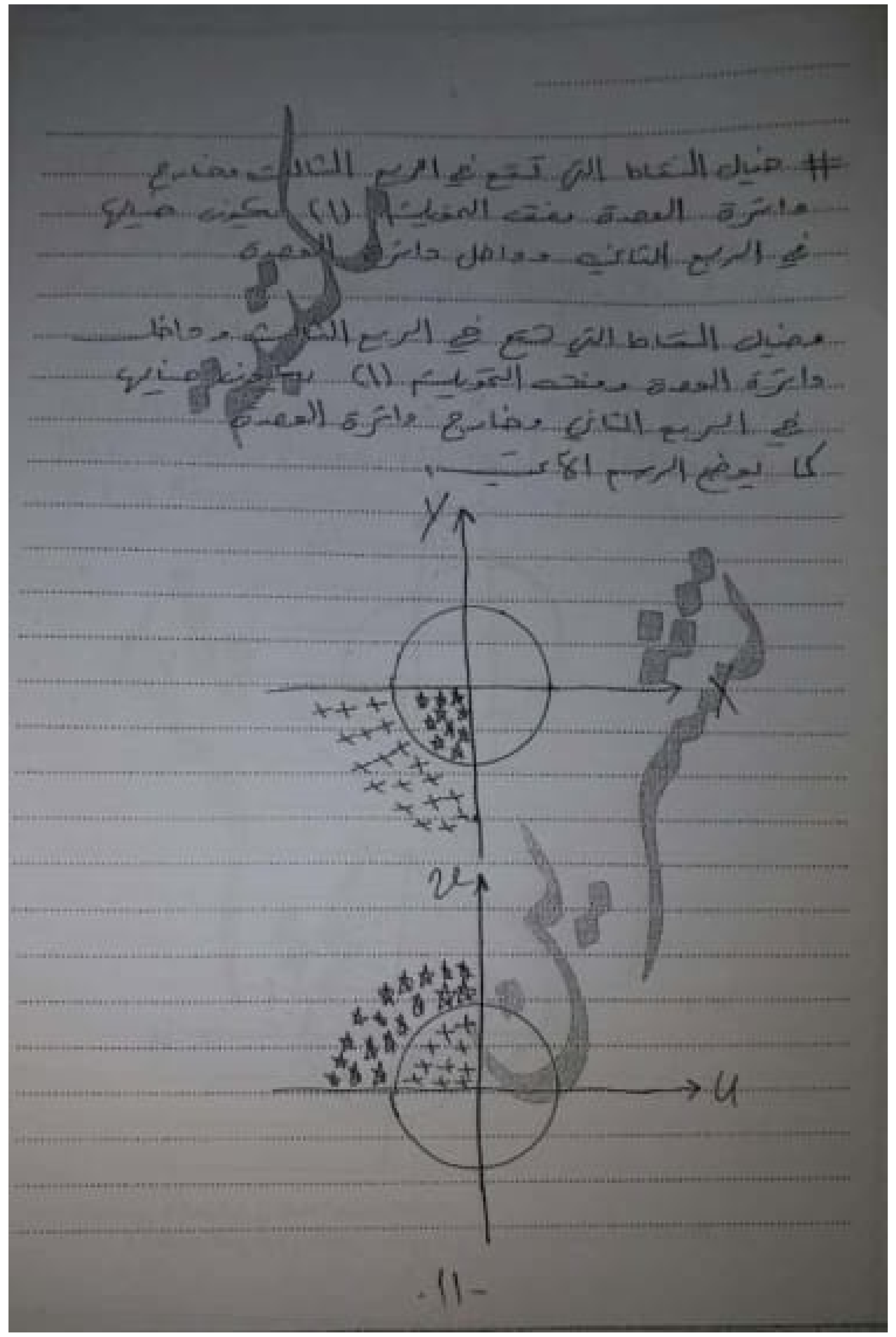
وهناك النقاط التي تقع في الربع الثاني و خارج دائرة الوحدة تحت التحويل (1) تقع في الربع الثالث وداخل دائرة الوحدة

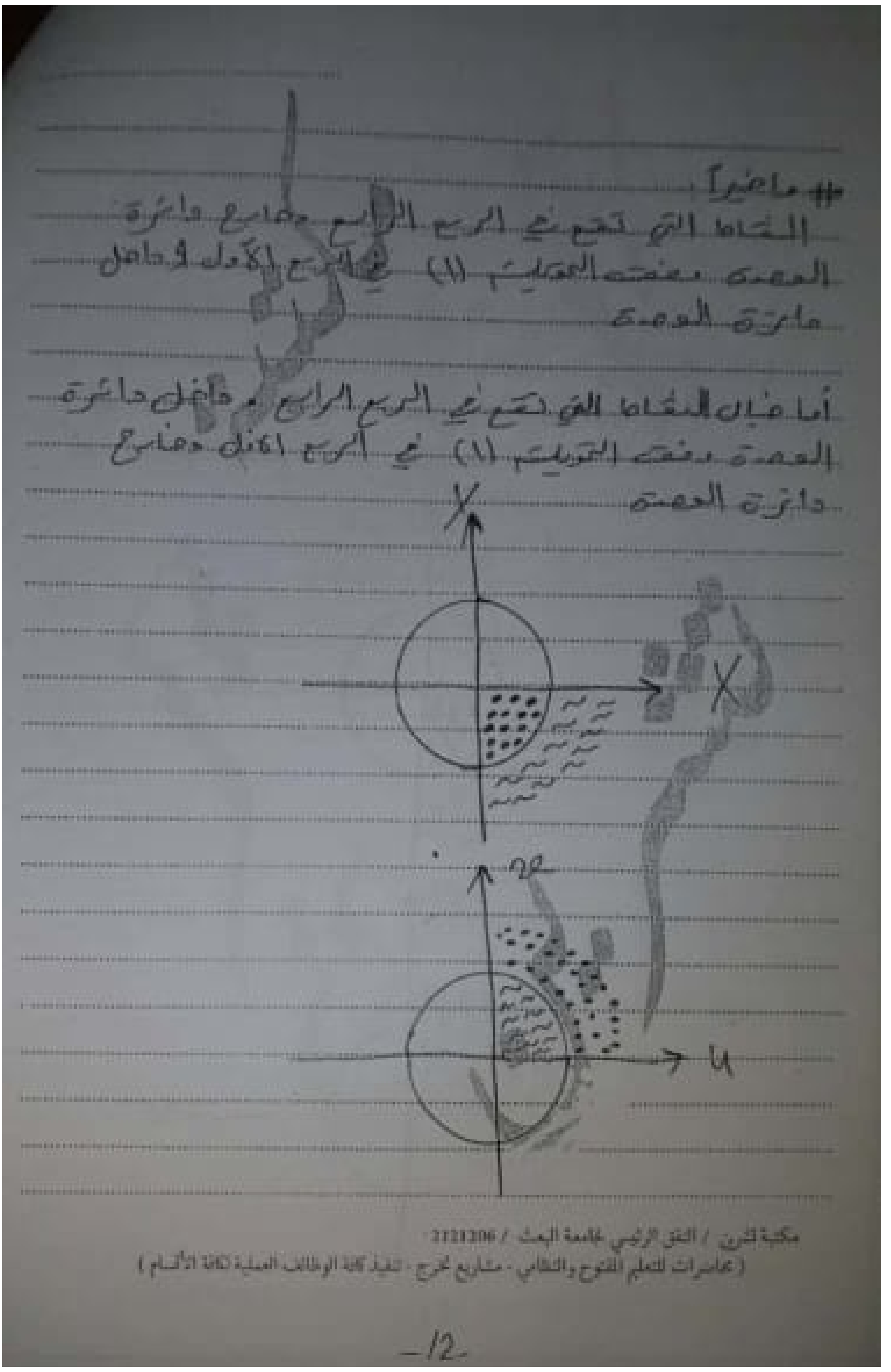


تمثيل النقاط التي تقع في الربع الثاني داخل
دائرة الوحدة بعكس الفقرة (أ) تقع في الربع
الثالث خارج دائرة الوحدة
كما في الرسم التوضيحي الآتي
Y
X

مثيل النقاط التي تقع في الربع الثالث خارج دائرة الوحدة تحت التحويل (1) تكون في الربع الثاني وداخل دائرة الوحدة

مثيل النقاط التي تقع في الربع الثالث وداخل دائرة الوحدة تحت التحويل (1) تقع في الربع الثاني وخارج دائرة الوحدة كما يوضح الرسم الآتي.

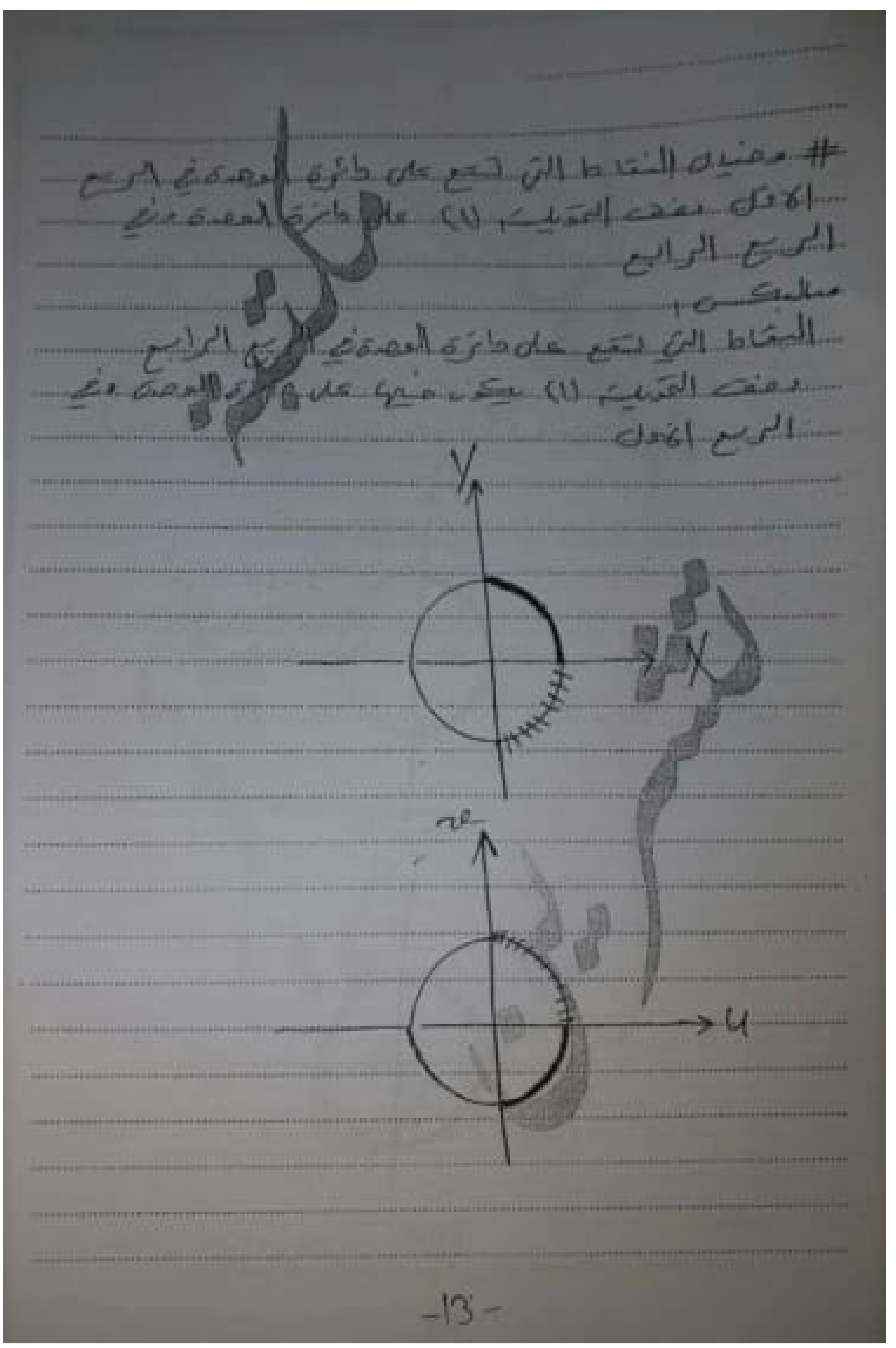




ملاحظة:

النقاط التي تقع في الربع الرابع وخارج دائرة الوحدة تنقلب بالتحويل (١) في الربع الأول وداخل دائرة الوحدة

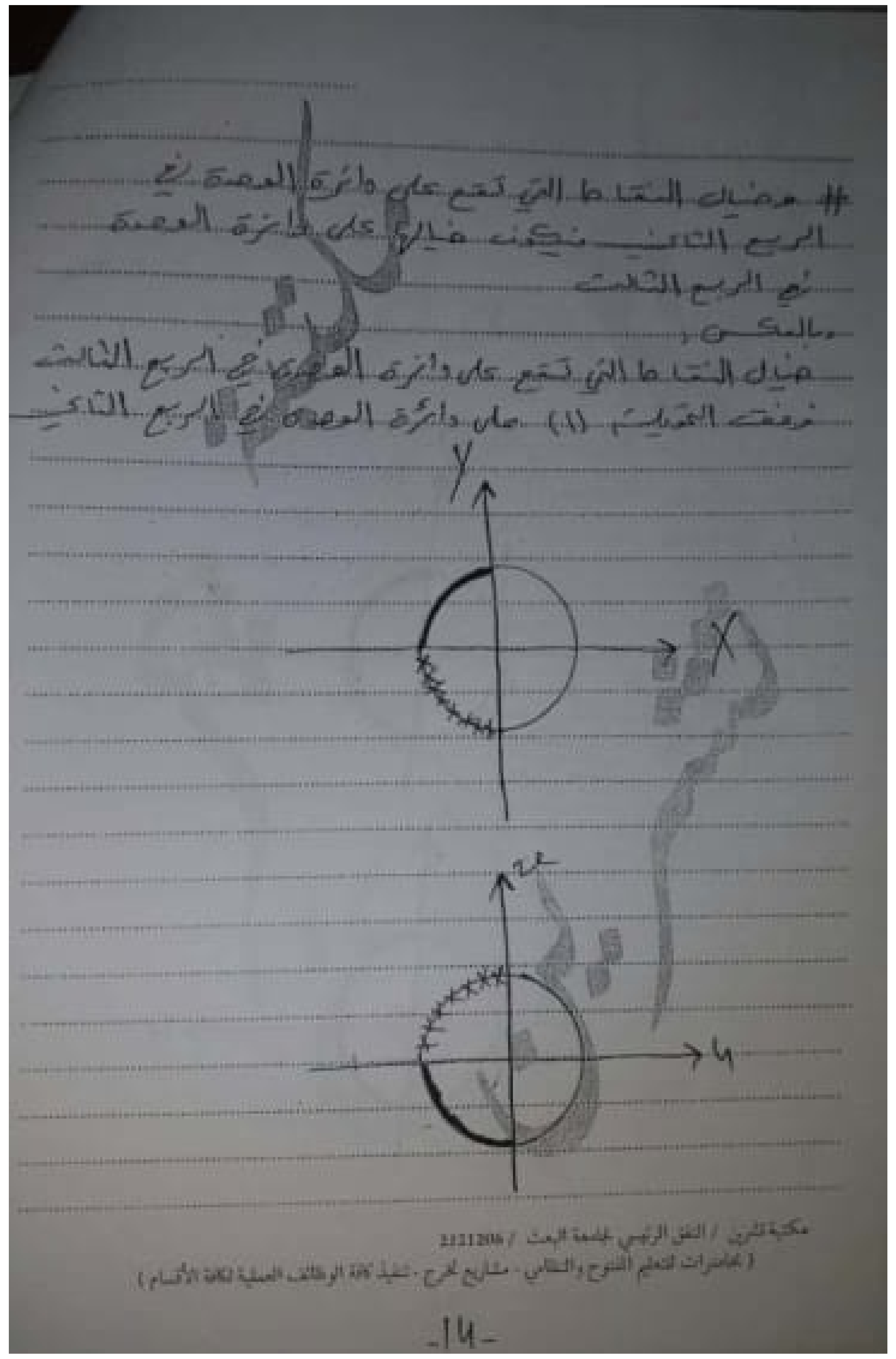
أما قبل النقاط التي تقع في الربع الرابع وداخل دائرة الوحدة تنقلب بالتحويل (١) في الربع الأول وخارج دائرة الوحدة



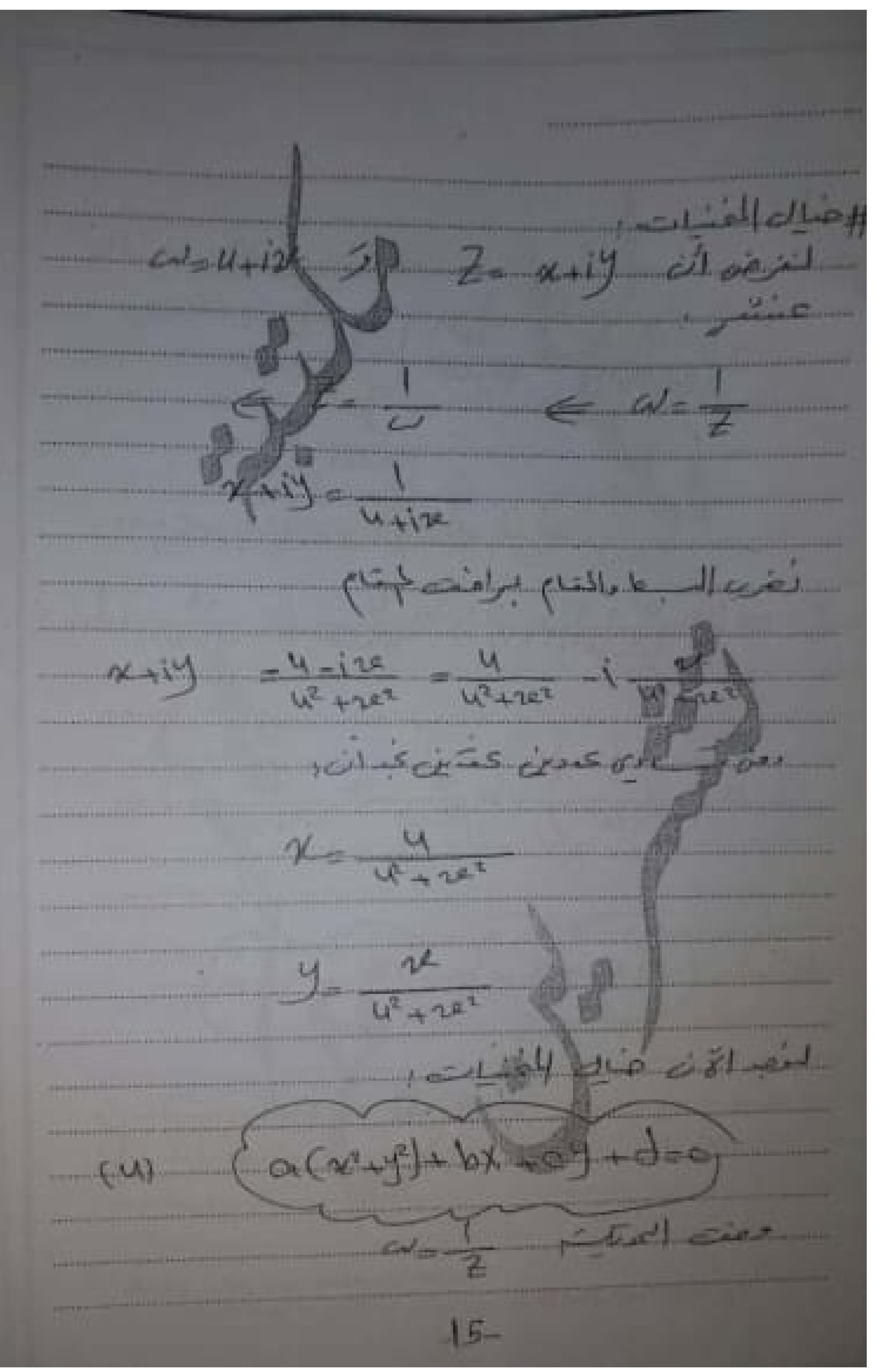
صور النقاط التي تقع على دائرة الوحدة في الربع الاول تحت التحويل (١) على دائرة الوحدة في الربع الرابع

بالعكس:

النقاط التي تقع على دائرة الوحدة في الربع الرابع تحت التحويل (١) تكون صورها على دائرة الوحدة في الربع الاول



ظلال النقاط التي تقع على دائرة الوحدة في الربع الثاني تكون ظلالها على دائرة الوحدة في الربع الثالث وبالعكس،
ظلال النقاط التي تقع على دائرة الوحدة في الربع الثالث تحت التطبيق (1) على دائرة الوحدة في الربع الثاني



إيجاد المنحنيات:

لنفرض أن $Z = x+iy$ و $w = u+iv$

عندئذ:

$$z = \frac{1}{w} \Leftarrow w = \frac{1}{z}$$

$$x+iy = \frac{1}{u+iv}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$x+iy = \frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$$

ومن تساوي عددين عقديين نجد أن:

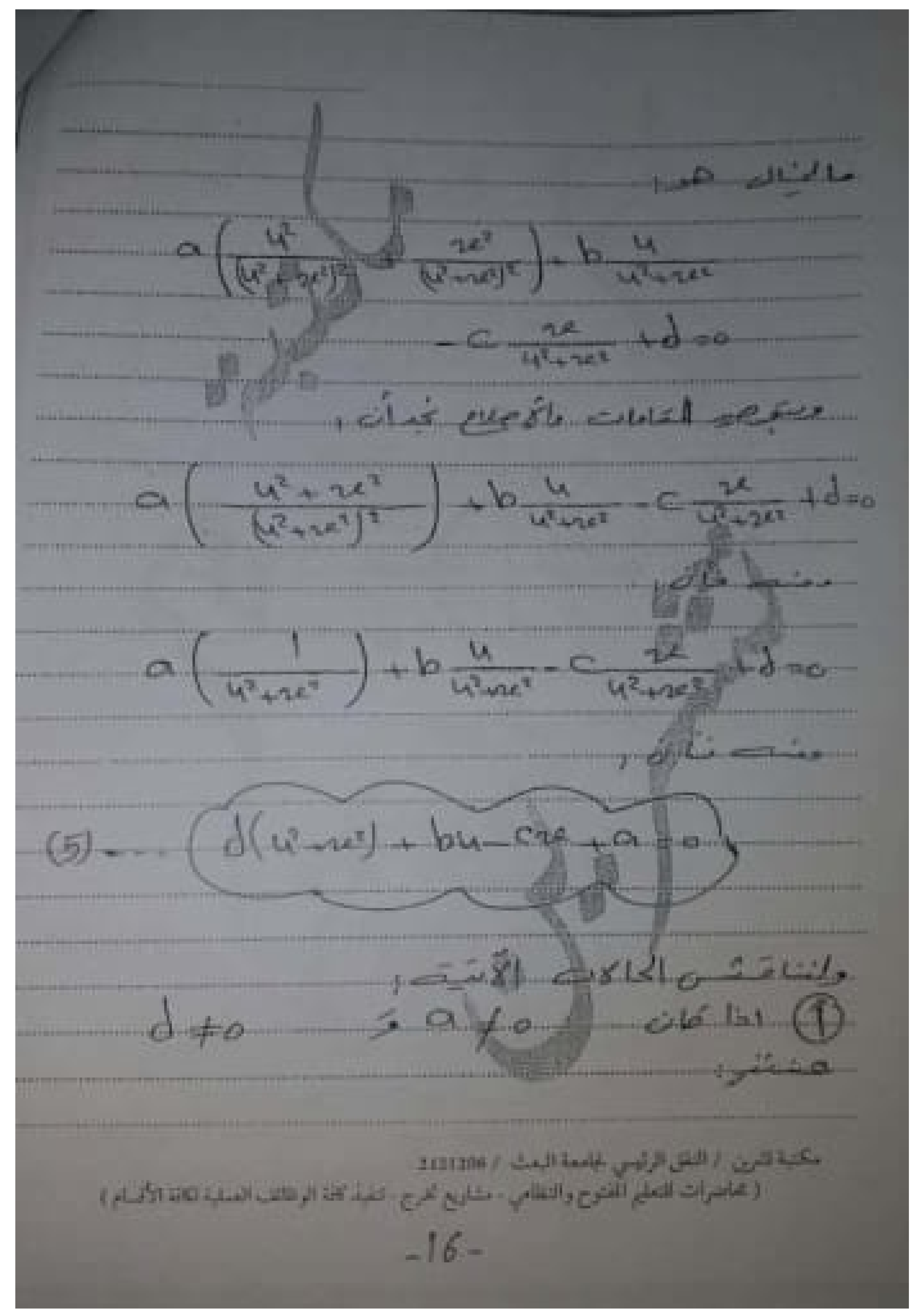
$$x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$y = \frac{v}{u^2+v^2}$$

لنجد الآن معادلة المنحنيات:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \quad (4)$$

تحت التحويل $w = \frac{1}{z}$



في المثال هنا

$$a\left(\frac{y^2}{(y^2+x^2)^2}+\frac{x^2}{(y^2+x^2)^2}\right)+b\,\frac{y}{y^2+x^2}-c\,\frac{x}{y^2+x^2}+d=0$$

وبتجميع الحدود ما بالأقواس نجد أن،

$$a\left(\frac{y^2+x^2}{(y^2+x^2)^2}\right)+b\,\frac{y}{y^2+x^2}-c\,\frac{x}{y^2+x^2}+d=0$$

ومنه نجد أن،

$$a\left(\frac{1}{y^2+x^2}\right)+b\,\frac{y}{y^2+x^2}-c\,\frac{x}{y^2+x^2}+d=0$$

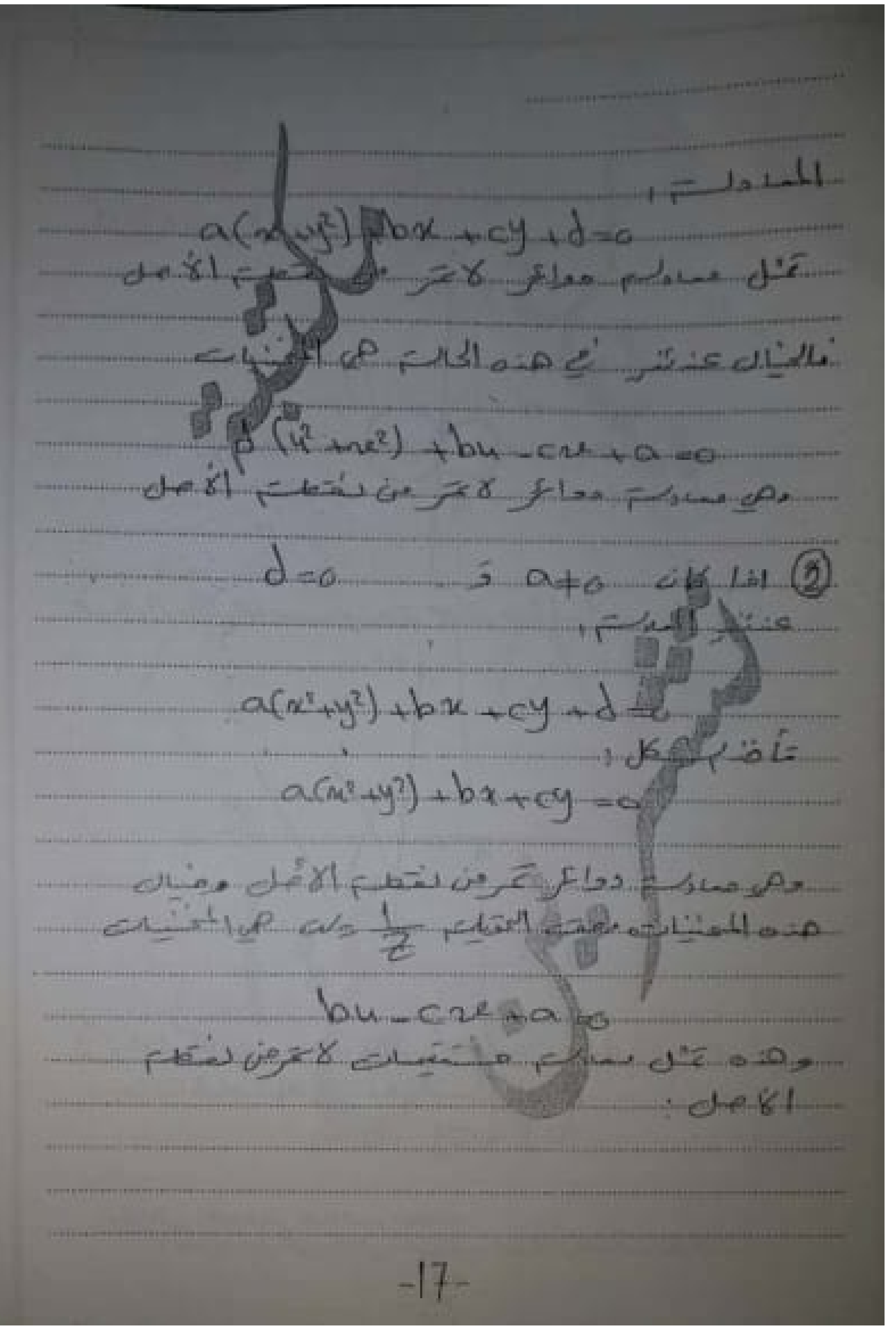
ومنه نجد أن،

(5) ... $d(y^2+x^2)+by-cx+a=0$

ولنناقش الحالات الآتية،

① إذا كان $a\neq 0$ و $d\neq 0$

عندئذٍ،



المعادلة :

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

تمثل معادلة معادلة دائرة لا تمر من نقطة الأصل

فالخيال عندئذ في هذه الحالة هي المنحنيات

$$a(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

هي معادلة دائرة لا تمر من نقطة الأصل

(2) اذا كانت $a\neq0$ و $d=0$

عندئذ المعادلة :

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

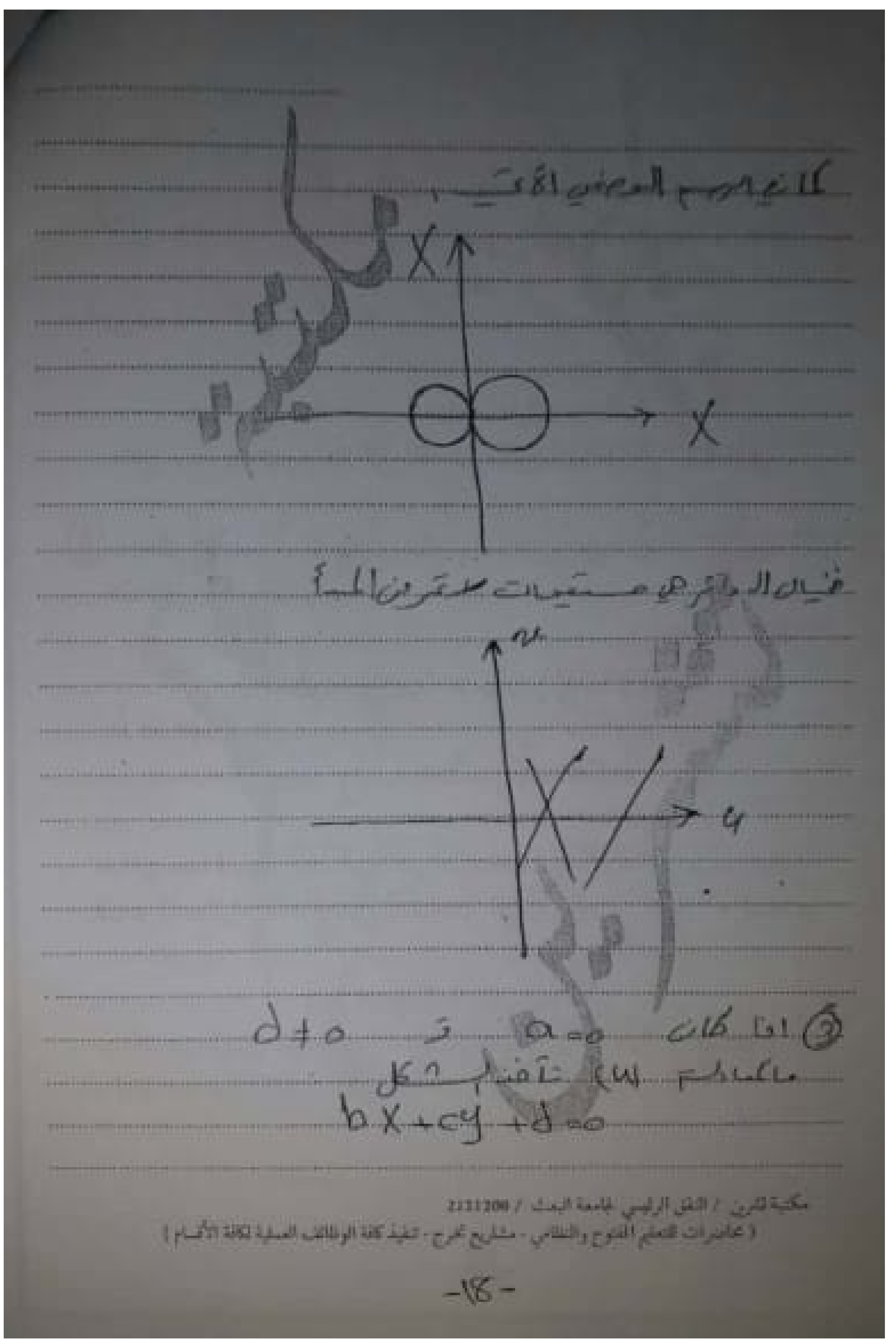
تأخذ الشكل :

$$a(x^2+y^2)+bx+cy=0$$

هي معادلة دائرة تمر من نقطة الأصل وخيال هذه المنحنيات وفق التحويل $\frac{1}{z}$ هي المنحنيات

$$bu-cv+a=0$$

وهذه تمثل معادلة مستقيمات لا تمر من نقطة الأصل :



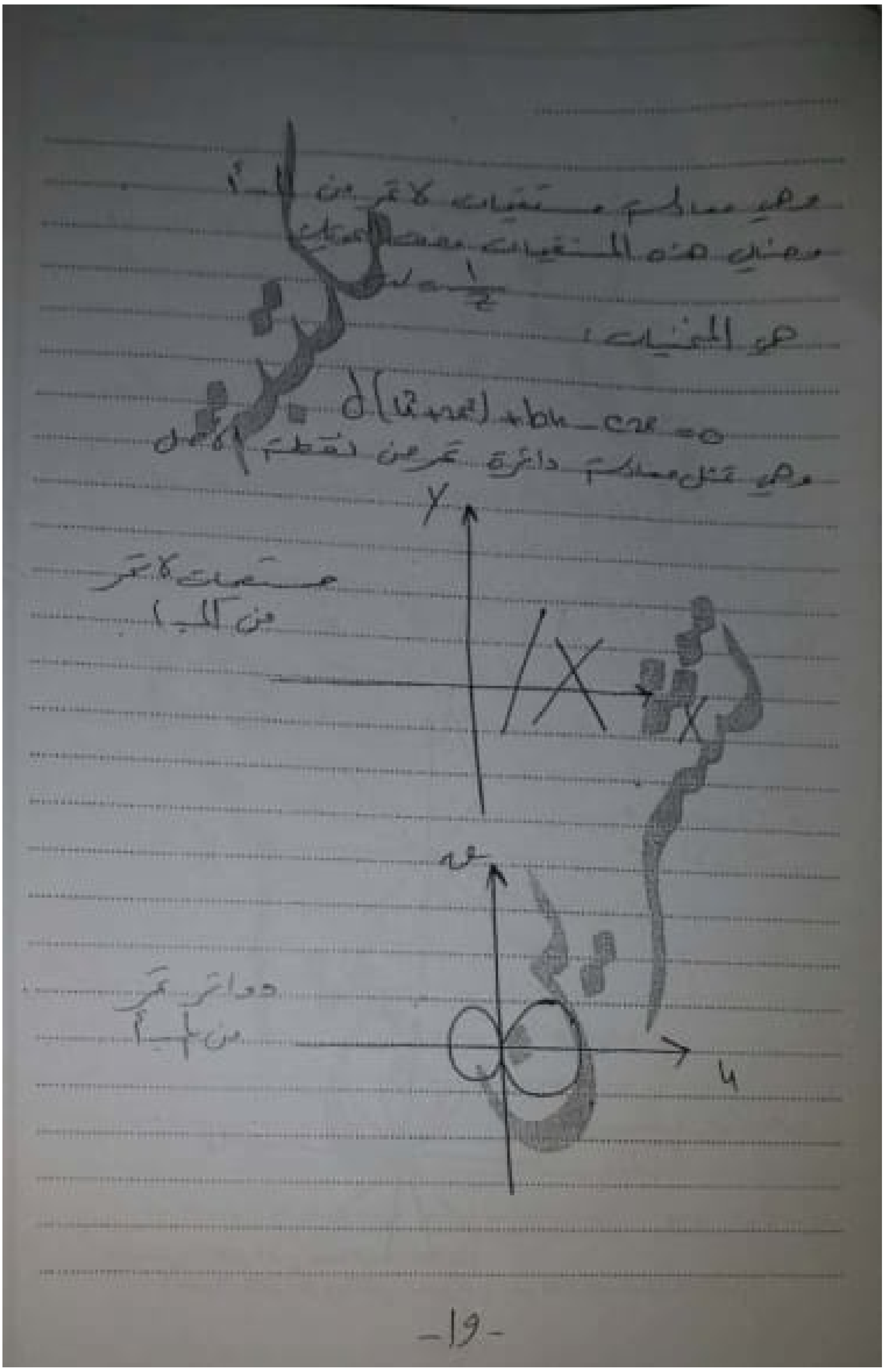
كما في الرسم الموضح في الآتي

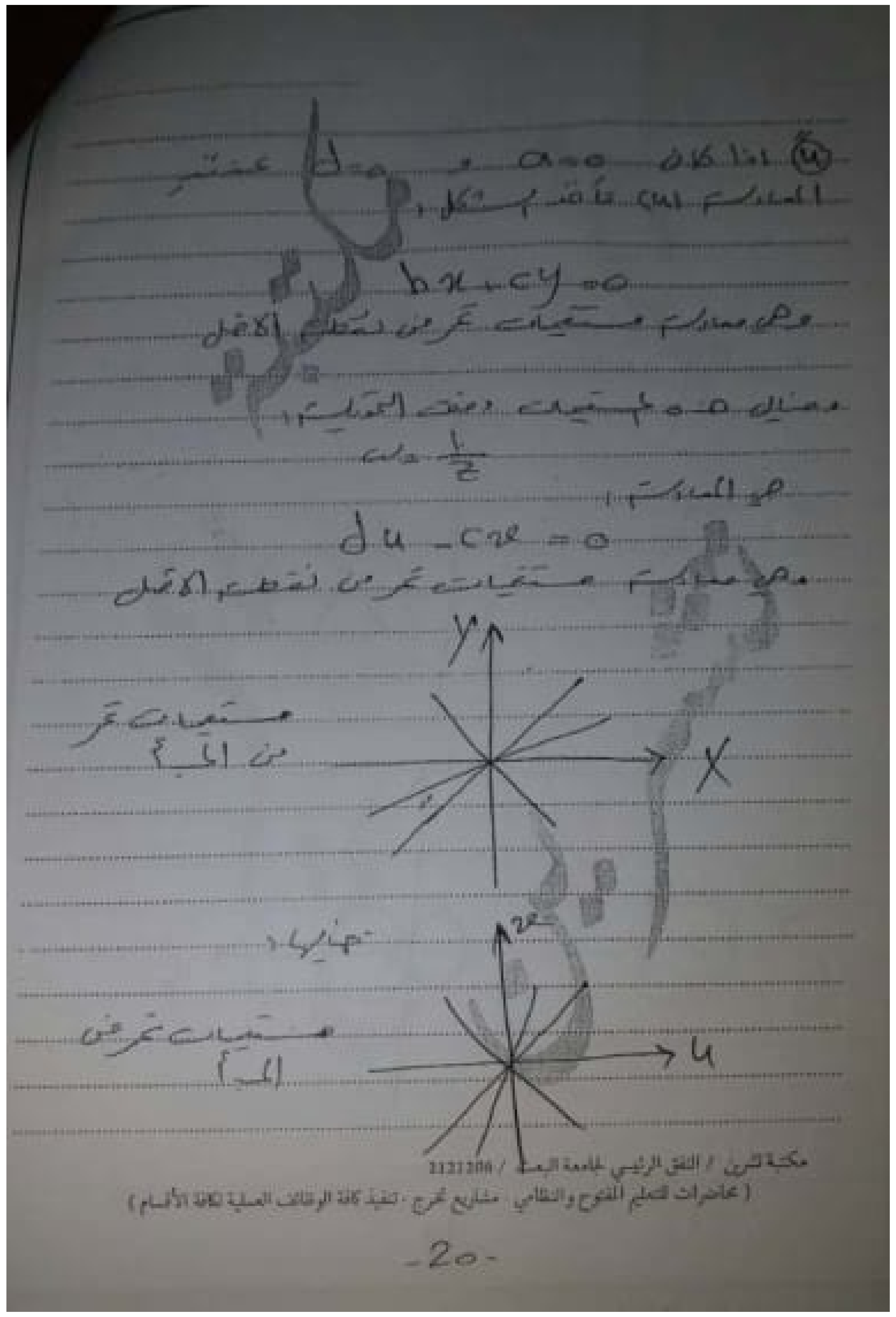
فهل المتوازي هي مستقيمات متعامدة في المستوى؟

③ اذا كانت $a=0$ و $d\neq0$

فالمعادلة (w) تأخذ شكل

$bx+cy+d=0$


وهي معادلة مستقيمات لا تمر من الـ أ
ومثل هذه المستقيمات
هي المنحنيات :
هي تمثل معادلة دائرة تمر من نقطة الأصل
مستقيمات لا تمر من الـ أ
دوائر تمر من أ



④ اذا كان $a=0$ ، $d \neq 0$ فنعتبر المعادلة تأخذ الشكل:

$$bx + cy = 0$$

هي معادلات مستقيمات تمر من المقطع الأصل

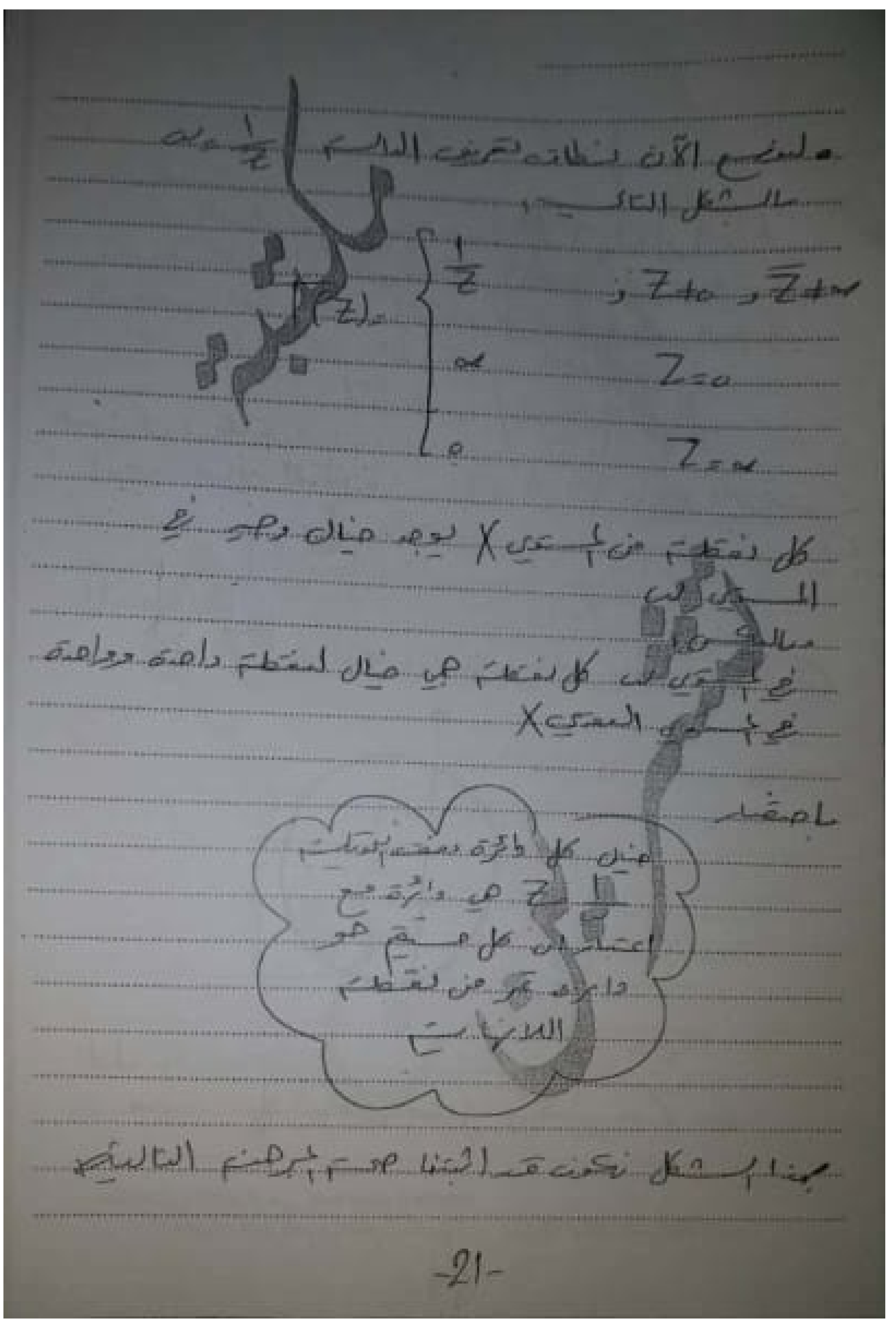
ومثال $a=0$ هي مستقيمات ومنه المعادلة:

$\frac{1}{2}$

هي المعادلة:

$$du - cv = 0$$

هي معادلة مستقيمات تمر من المقطع الأصل



ملاحظة: الآن نستطيع تعريف الدالة $\frac{1}{z}$ على الشكل التالي:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq 0 \text{ و } z \neq \infty \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

كل نقطة من المستوي X يوجد ظل وحيد في الكرة

وبالعكس

في الكرة كل نقطة هي ظل لنقطة واحدة وواحدة في المستوي X

ملاحظة

ظل كل دائرة بالتحويل $\frac{1}{z}$ هي دائرة مع اعتبار أن كل مستقيم هو دائرة تمر من نقطة اللانهاية

بهذا الشكل تكون قد انتهينا من جميع التحويلات

مبرهنة:

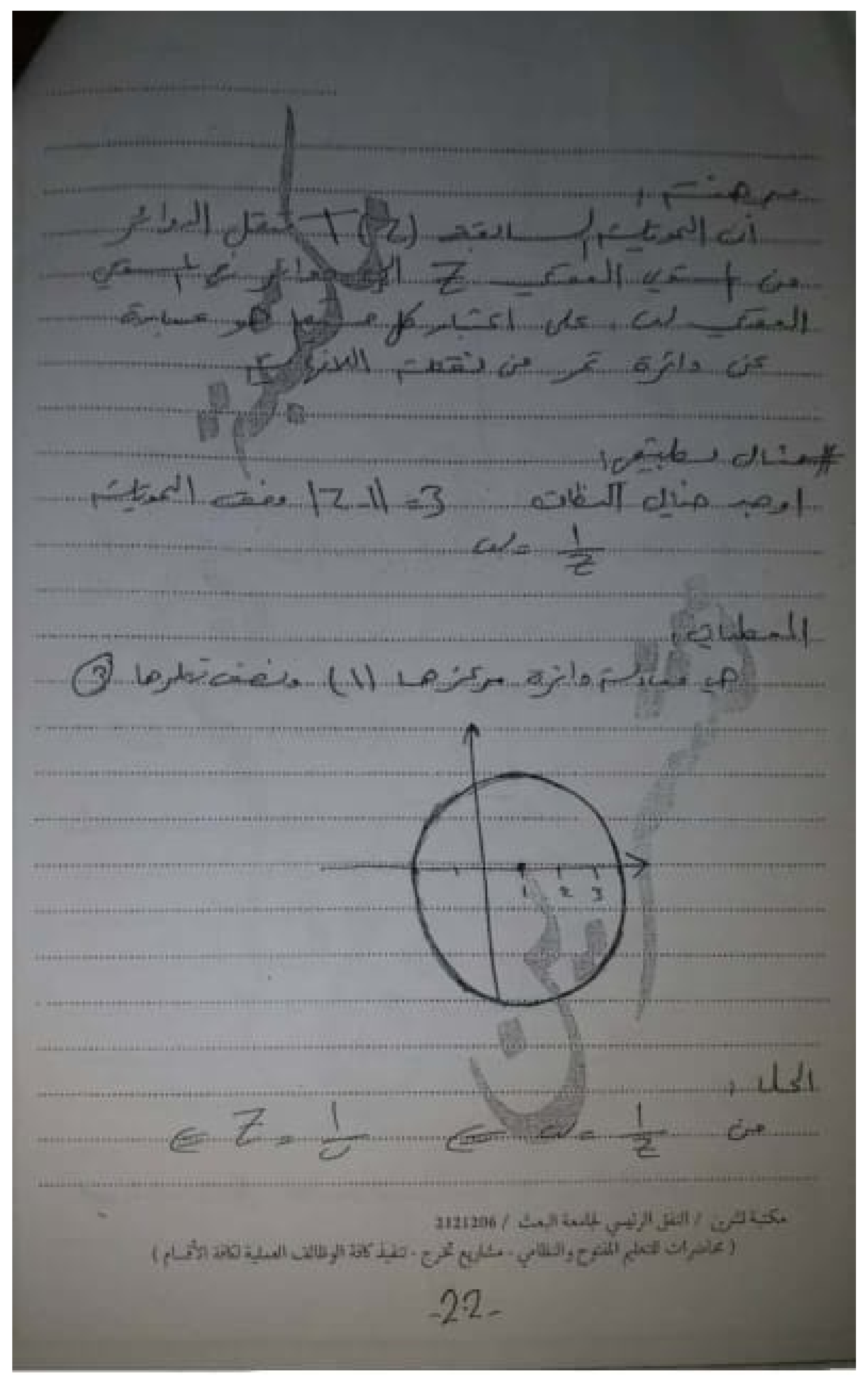
أن التحويل السابق $w = \frac{1}{z}$ ينقل الدوائر
من مستوي العقدي z إلى الدوائر من مستوي
العقدي w على اعتبار كل مستقيم هو عبارة
عن دائرة تمر من النقطة اللانهائية ∞

مثال تطبيقي:

اوجد مثال النظائر $|z-1| = 3$ وفق التحويل
$w = \frac{1}{z}$

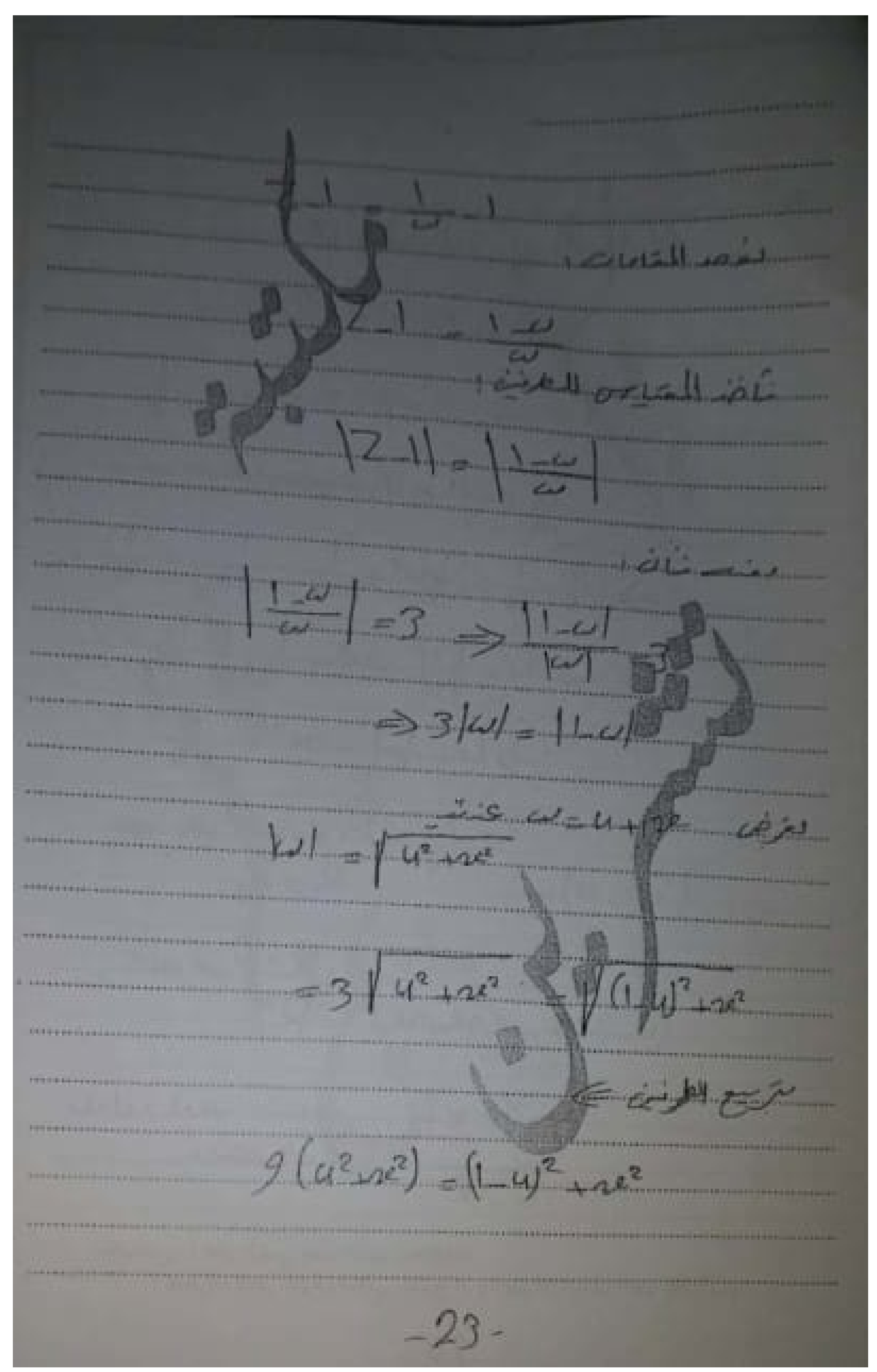
المطلوب:

هي معادلة دائرة مركزها (1) ونصف قطرها 3



الحل:

من $w = \frac{1}{z} \Leftarrow z = \frac{1}{w} \Leftarrow$



$\left|1 - \frac{1}{س}\right|$

نوحد المقامات:

$\frac{س - 1}{س} = 1 - \frac{1}{س}$

نأخذ المقياس للطرفين:

$|Z - 1| = \left|\frac{س - 1}{س}\right|$

وحيث أن:

$\left|\frac{1 - س}{س}\right| = 3 \Rightarrow \frac{|1 - س|}{|س|} = 3$

$\Rightarrow 3|س| = |1 - س|$

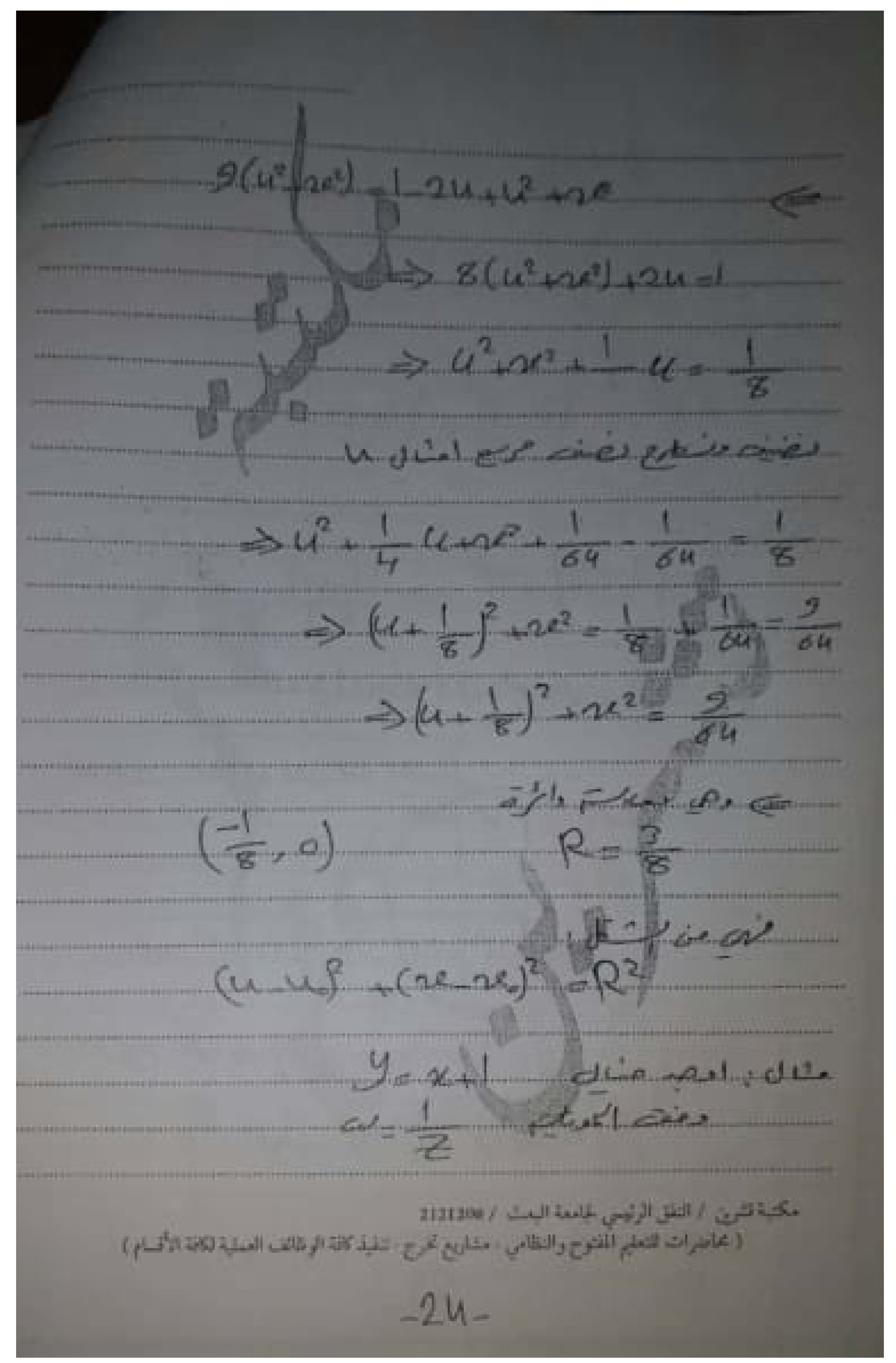
نفرض س = ص + ع ت

$|س| = \sqrt{ص^2 + ع^2}$

$= 3\sqrt{ص^2 + ع^2} = \sqrt{(1 - ص)^2 + ع^2}$

تربيع الطرفين ⇐

$9(ص^2 + ع^2) = (1 - ص)^2 + ع^2$



$$9(u^2+v^2) = 1 - 2u + u^2 + v^2$$

$$\Rightarrow 8(u^2+v^2) + 2u = 1$$

$$\Rightarrow u^2+v^2 + \frac{1}{4}u = \frac{1}{8}$$

نضيف ونطرح نصف مربع امثال u

$$\Rightarrow u^2 + \frac{1}{4}u + v^2 + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left(u+\frac{1}{8}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{9}{64}$$

$$\Rightarrow \left(u+\frac{1}{8}\right)^2 + v^2 = \frac{9}{64}$$

وهي معادلة دائرة

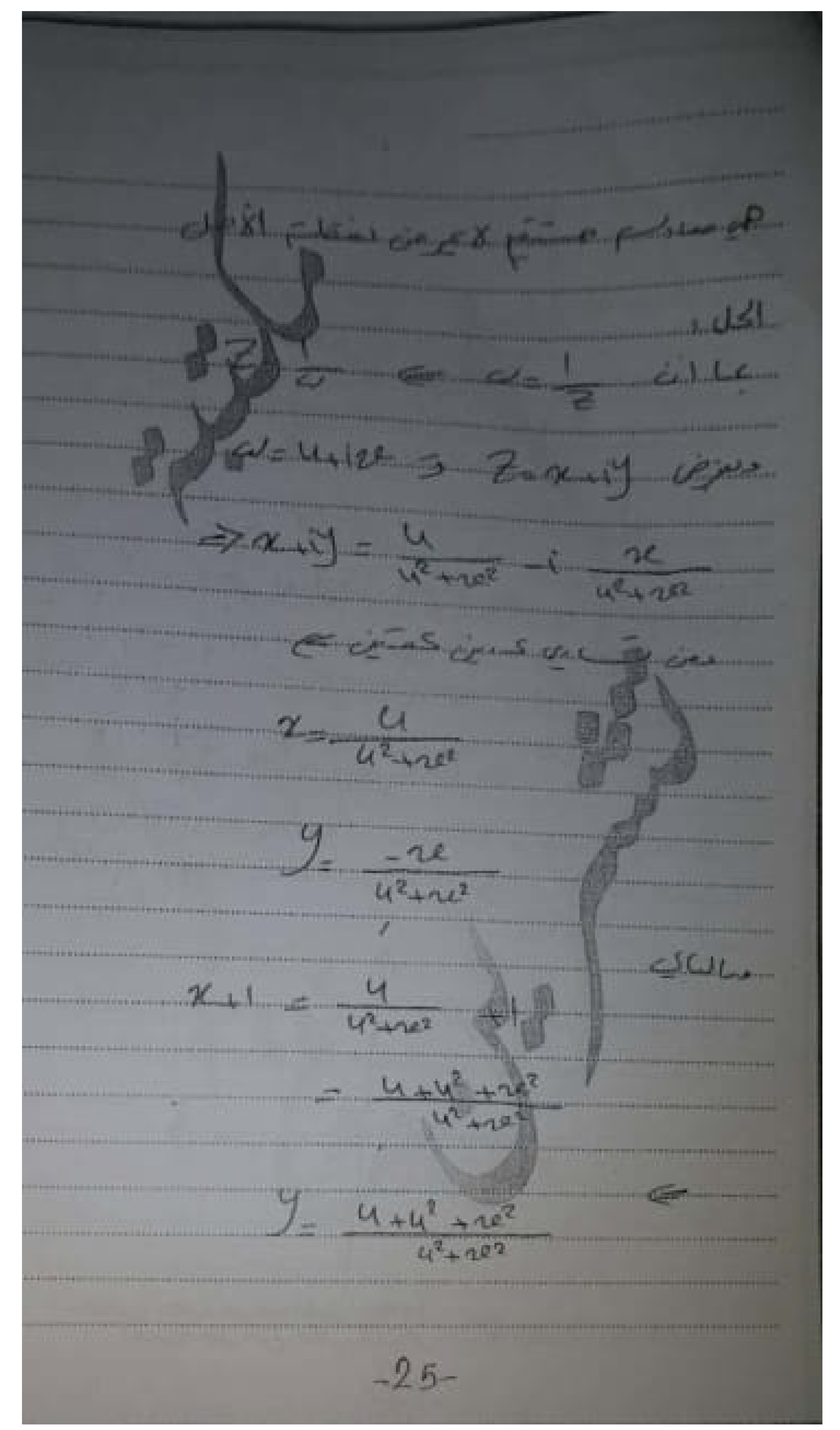
$\left(\frac{-1}{8}, 0\right)$ $R = \frac{3}{8}$

وهي من الشكل

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 = R^2$$

مثال: اوجد مناظر $y = x+1$

وفق التحويل $w = \frac{1}{z}$



هي صورة مستقيم لا يمر من نقطة الأصل

الحل:

علاقة $w = \frac{1}{z}$ ⟸ $z = \frac{1}{w}$

نفرض $z = x + iy$ ⟹ $w = u + iv$

$$\Rightarrow x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - i\,\frac{v}{u^2+v^2}$$

ومن تساوي عددين مركبين ⟸

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

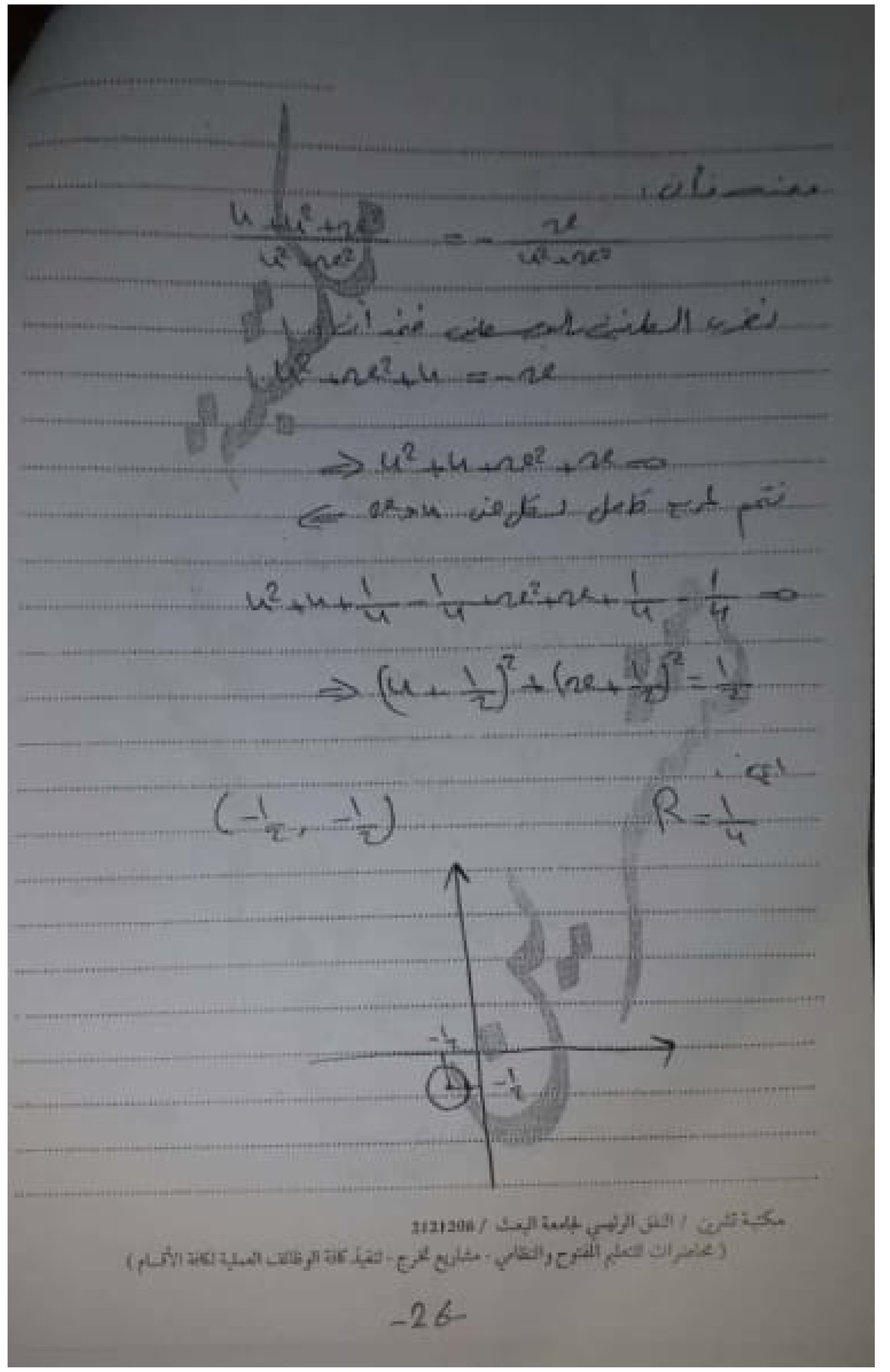
بالتالي

$$x + 1 = \frac{u}{u^2+v^2} + 1$$

$$= \frac{u+u^2+v^2}{u^2+v^2}$$

⟸

$$y = \frac{u+u^2+v^2}{u^2+v^2}$$



منحنيات:

$$\frac{u}{u^2+v^2} = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

نضرب الطرفين بالمقام نجد أن:

$$u^2+v^2+u = -v$$

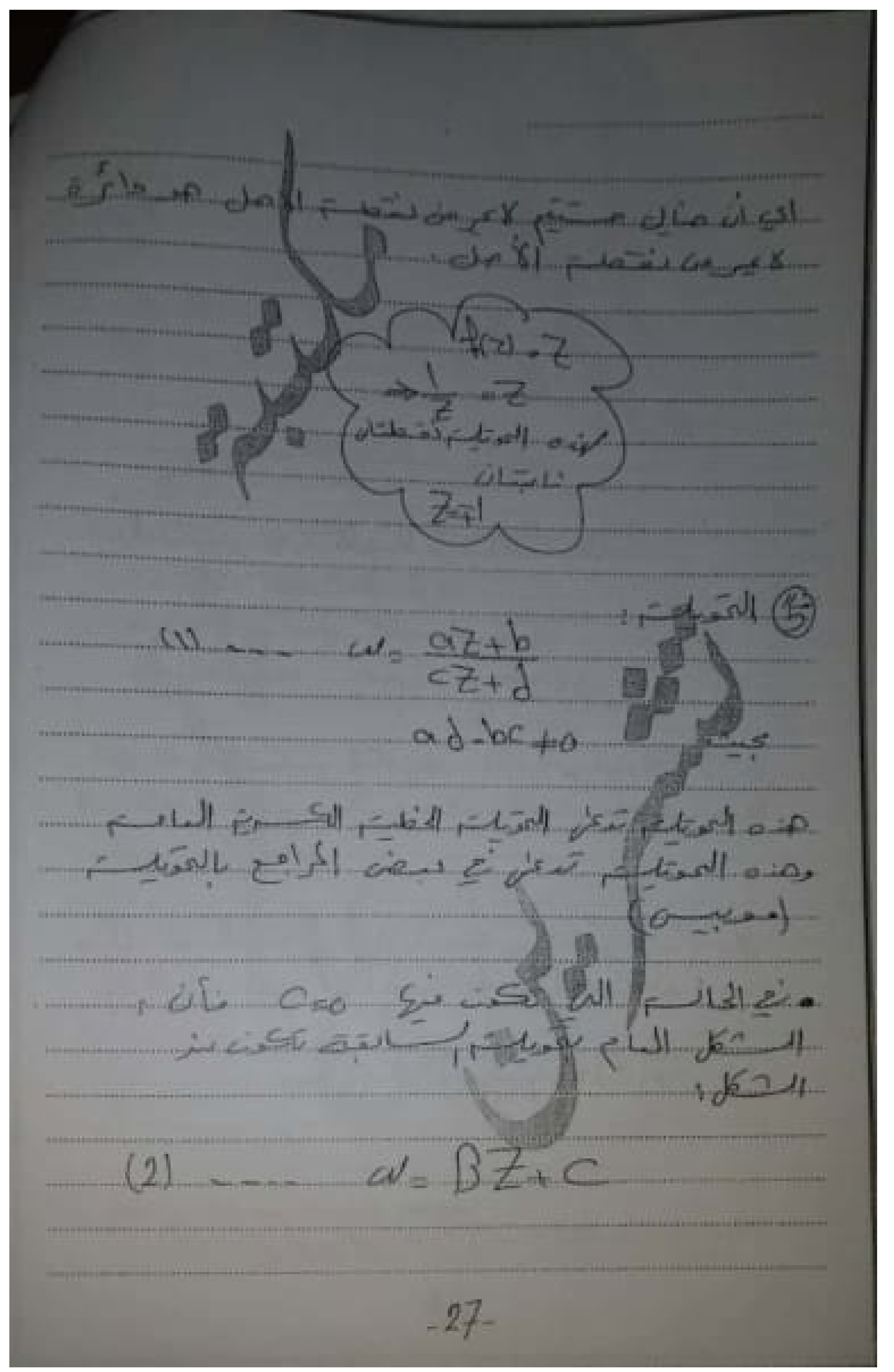
$$\Rightarrow u^2+u+v^2+v = 0$$

نتمم لمربع كامل لنتخلص من uv ⟸

$$u^2+u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+v^2+v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

مركزها $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $R = \frac{1}{4}$



أي أن صورة مستقيم لا يمر بنقطة الأصل هي دائرة لا تمر بنقطة الأصل

$z = f(z)$

$z = \frac{1}{z}$

لهذه العملية نقطتان ثابتتان

$z = \pm 1$

⑤ التحويلات:

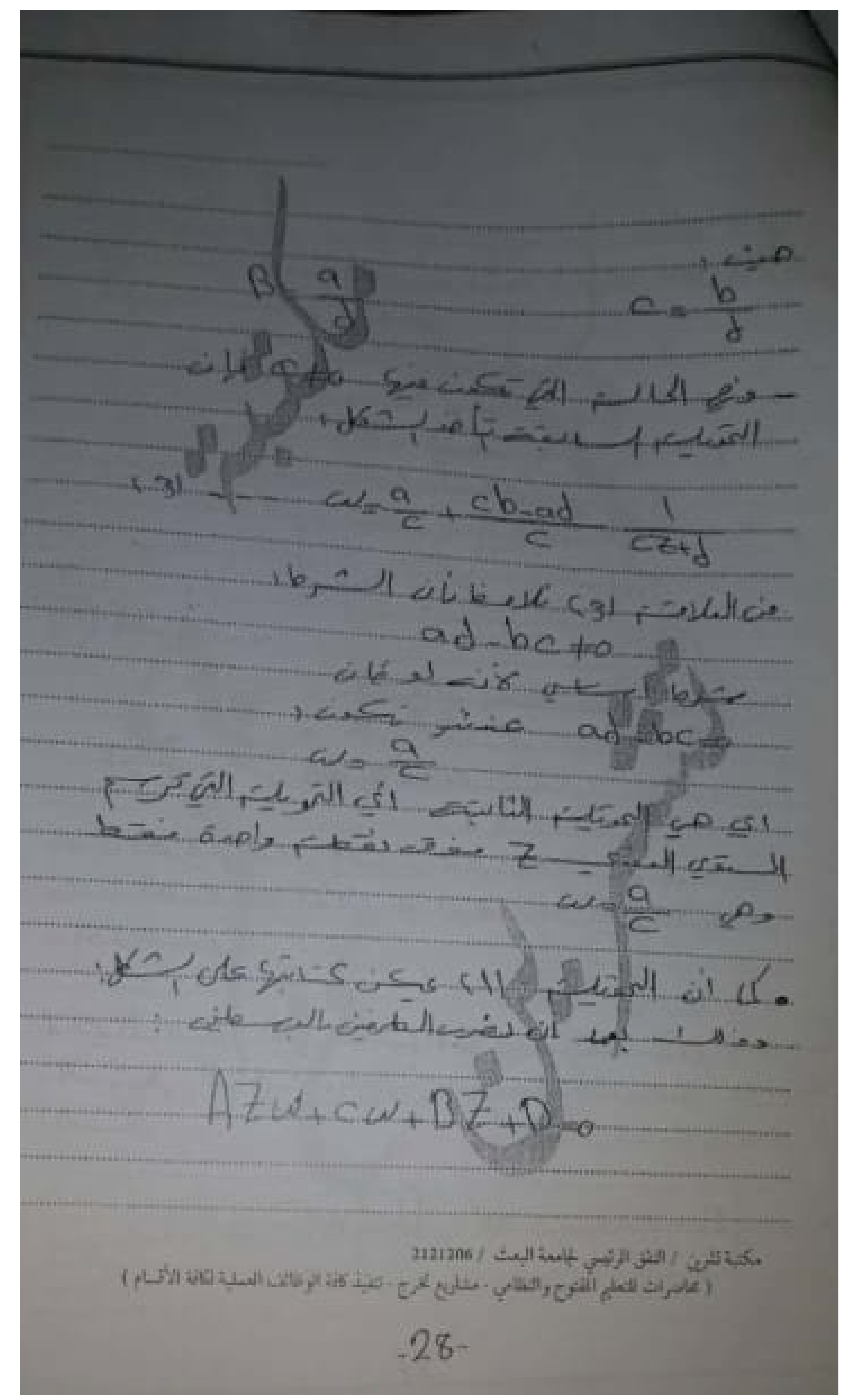
$$\omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{---- (1)}$$

حيث $ad - bc \neq 0$

هذه العملية تعرف بالتحويلات الخطية الكسرية العامة وهذه العملية تعرف في بعض المراجع بالتحويلات (موبيوس)

• في الحالة التي يكون فيها $c = 0$ فإن الشكل العام للتحويلات السابقة يكون من الشكل:

$$\omega = \beta z + c \quad \text{---- (2)}$$



حيث :

$c = \frac{b}{d}$

- في الحالة التي تكون فيها معاملات التحويل ... تأخذ بشكل :

(31) $w = \frac{a}{c} + \frac{cb - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$

من العلاقة (3) نلاحظ أن الشرط :

$ad - bc \neq 0$

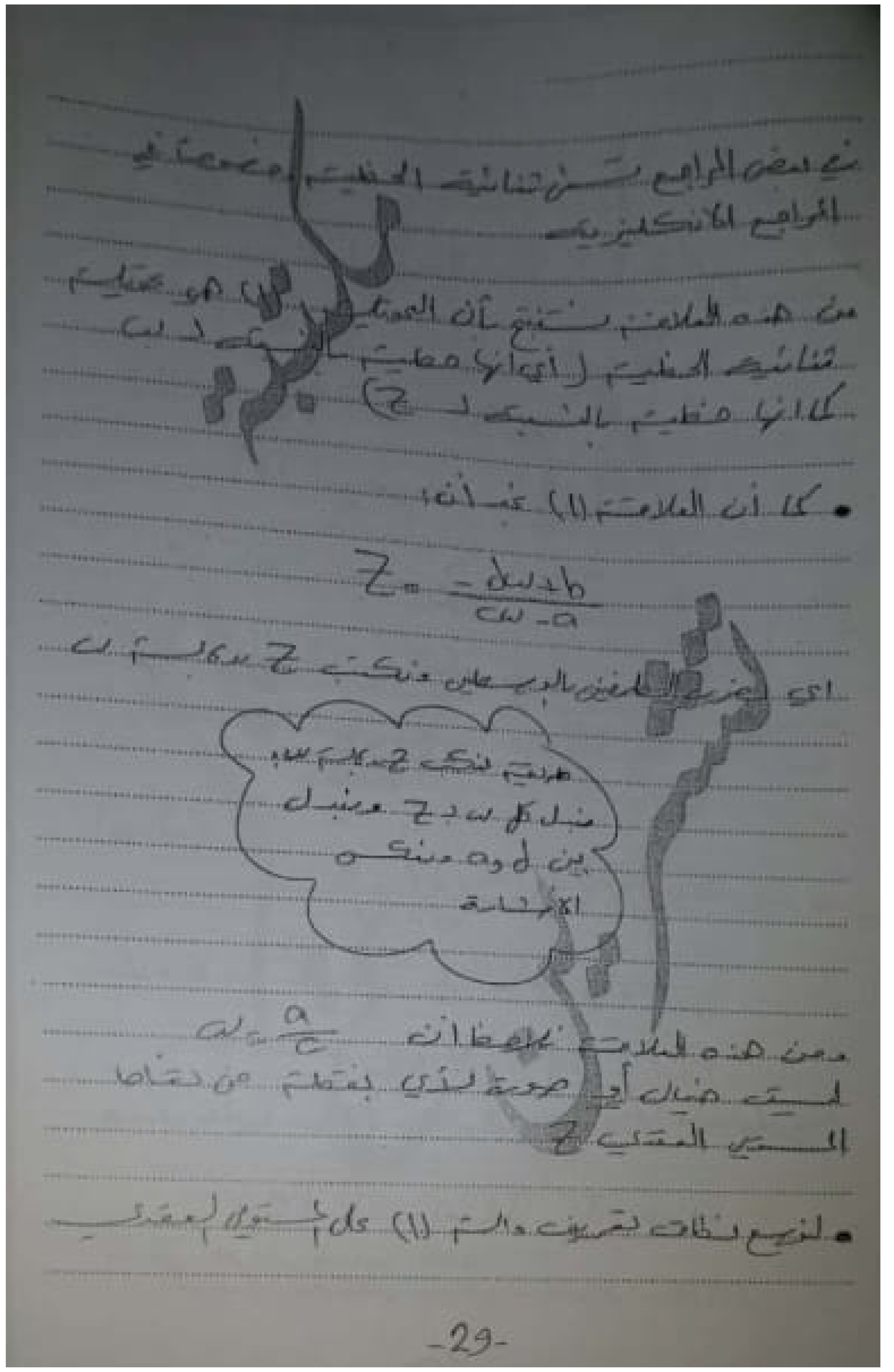
شرط أساسي لأنه لو كان $ad - bc = 0$ عندئذ يكون :

$w = \frac{a}{c}$

أي هي العملية الثابتة أي التحويلة التي تحول المستوي العقدي Z بأكمله إلى نقطة واحدة فقط وهي $w = \frac{a}{c}$

• كما أن التحويل (1) يمكن كتابته على الشكل : وذلك بعد أن نضرب الطرفين بالمخرج :

$AZW + CW + BZ + D = 0$



في بعض المراجع تسمى ثنائية الخطية وضعت في المراجع الانكليزية

من هذه العلاقة نستنتج أن المعامل هو معامل ثنائية الخطية (أي أنها مطية بالشبكة لـ) كما أنها مطية بالشبكة لـ (ج)

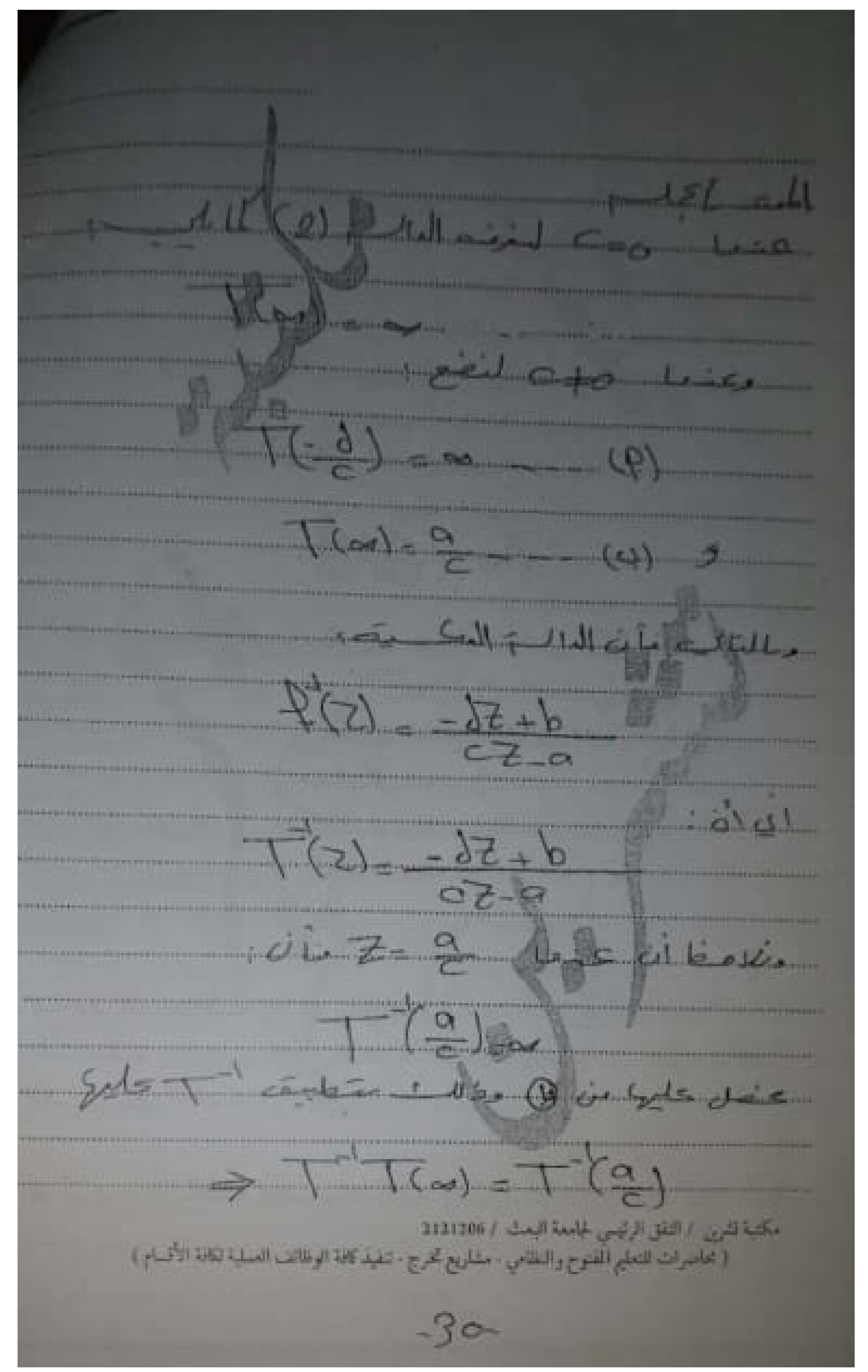
• كما أن العلاقة (1) تعطي أنه:

$$Z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

أي أن التحويل الخطي الكسري متقابل Z مع W

ومن هذه العلاقات نلاحظ أنه $\frac{a}{c} = w$
ليست هناك أي صورة للنقطة من نقاط
المستوي المركب Z

• لنرجع لنظام تعريف الدالة (1) على المستوي المركب



المعتمد الحل

عندما $c \neq 0$ نفرض الدالة (2) كالتالي:

∞ = ...

وعندما $c \neq 0$ نضع:

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{--- (P)}$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{--- (\textit{b})} \quad \text{و}$$

وبالتالي فإن الدالة العكسية

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

أي أن:

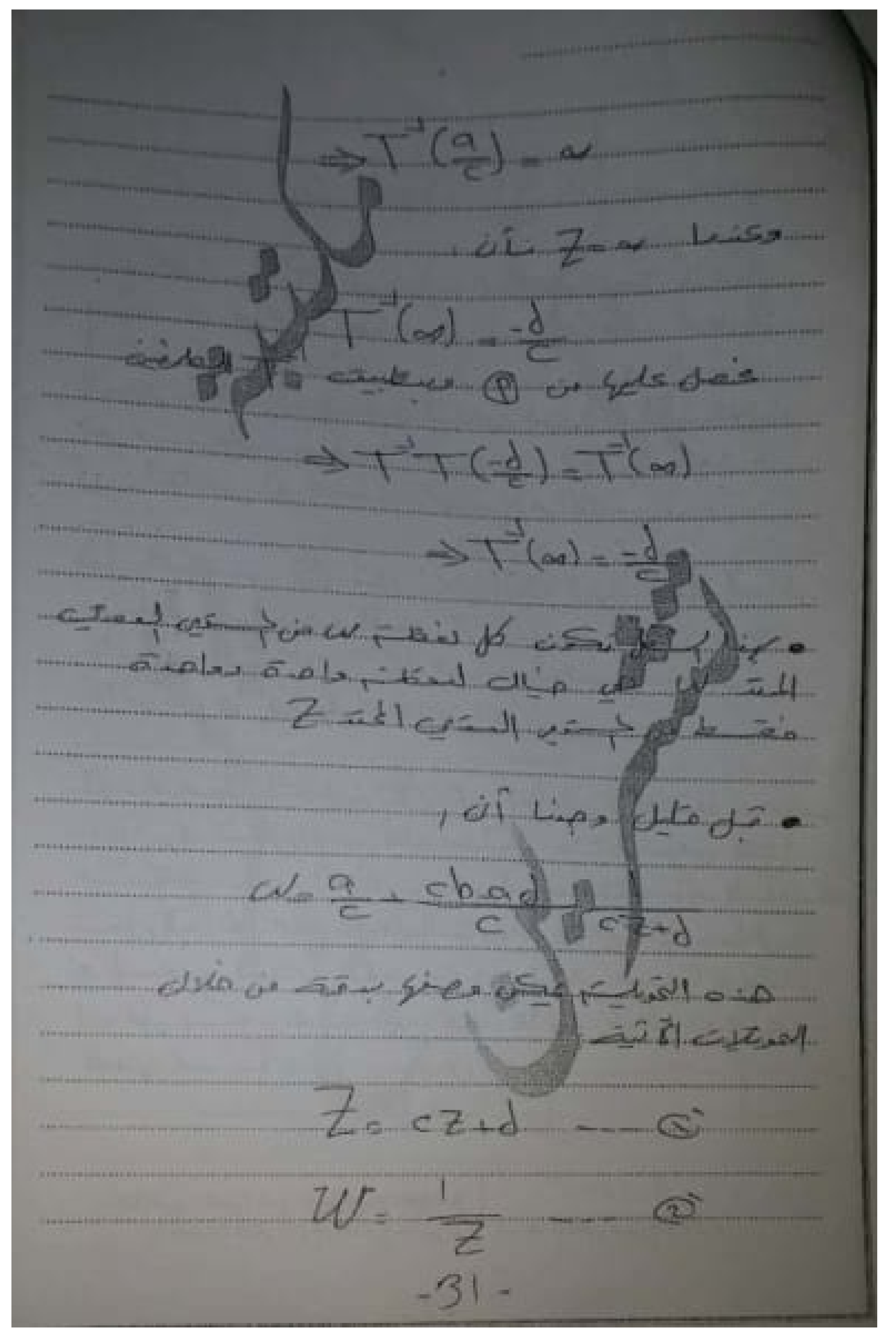
$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

ملاحظة أن عندما $z = \frac{a}{c}$ فإن:

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$$

نحصل عليها من (b) وذلك بتطبيق T^{-1} على

$$\Rightarrow T^{-1}T(\infty) = T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$



$\Rightarrow T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$

وعندما $z = \infty$ فان

$T^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$

نحصل عليه من تطبيق ② ...

$\Rightarrow T^{-1}T\left(\frac{-d}{c}\right) = T^{-1}(\infty)$

$\Rightarrow T^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$

• ... يمكن كل نقطة بها من المستوي العقدي الممتد ... في مثال لنقطة واحدة مقابلة على ... المستوي العقدي الممتد Z

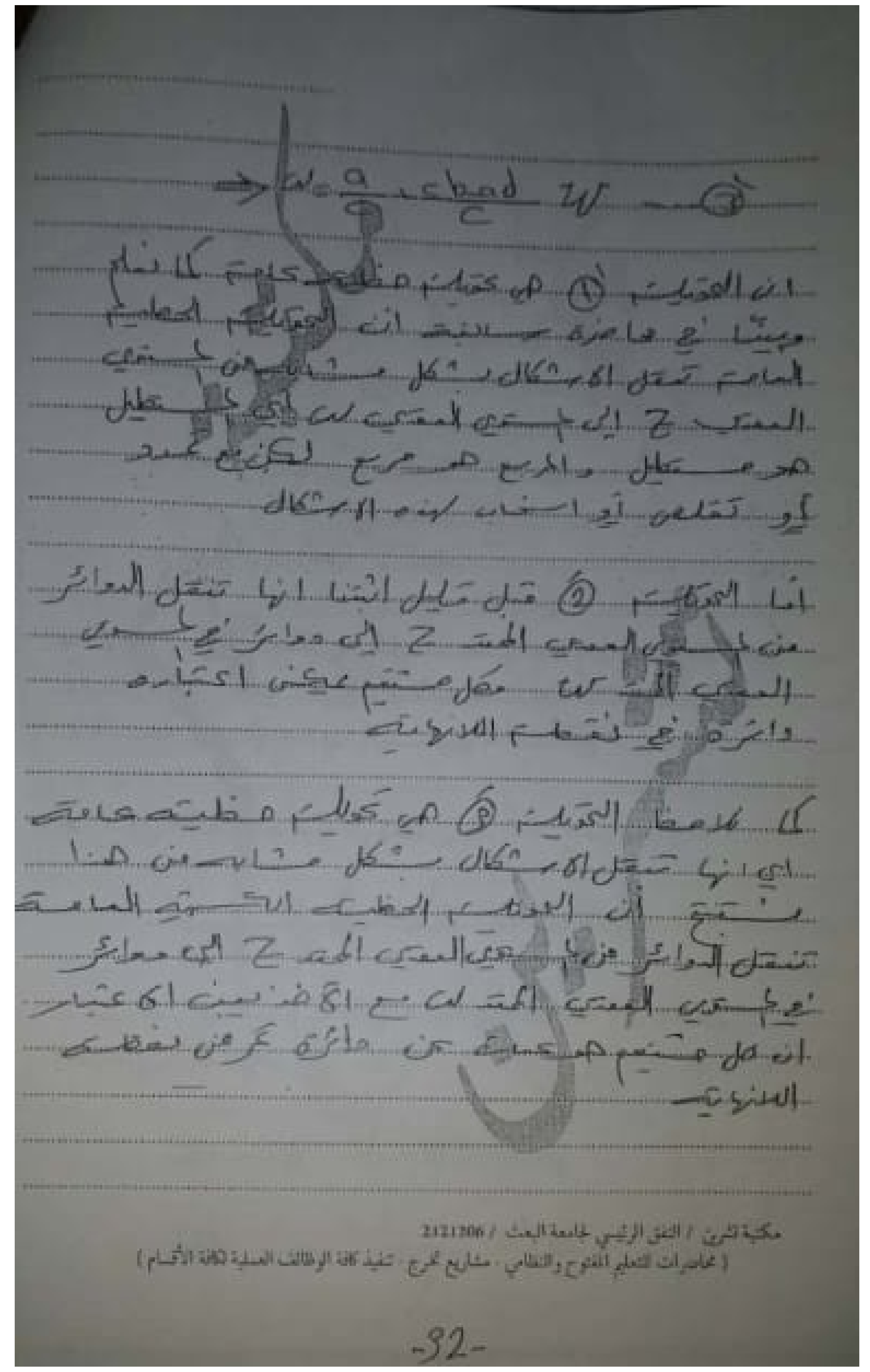
• قبل قليل وجدنا أن ،

$w = \frac{a}{c} - \frac{cb-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$

هذه العملية يمكن تجزئها بدقة من خلال العمليات الآتية

$Z = cz + d$ — ①

$W = \frac{1}{Z}$ — ②

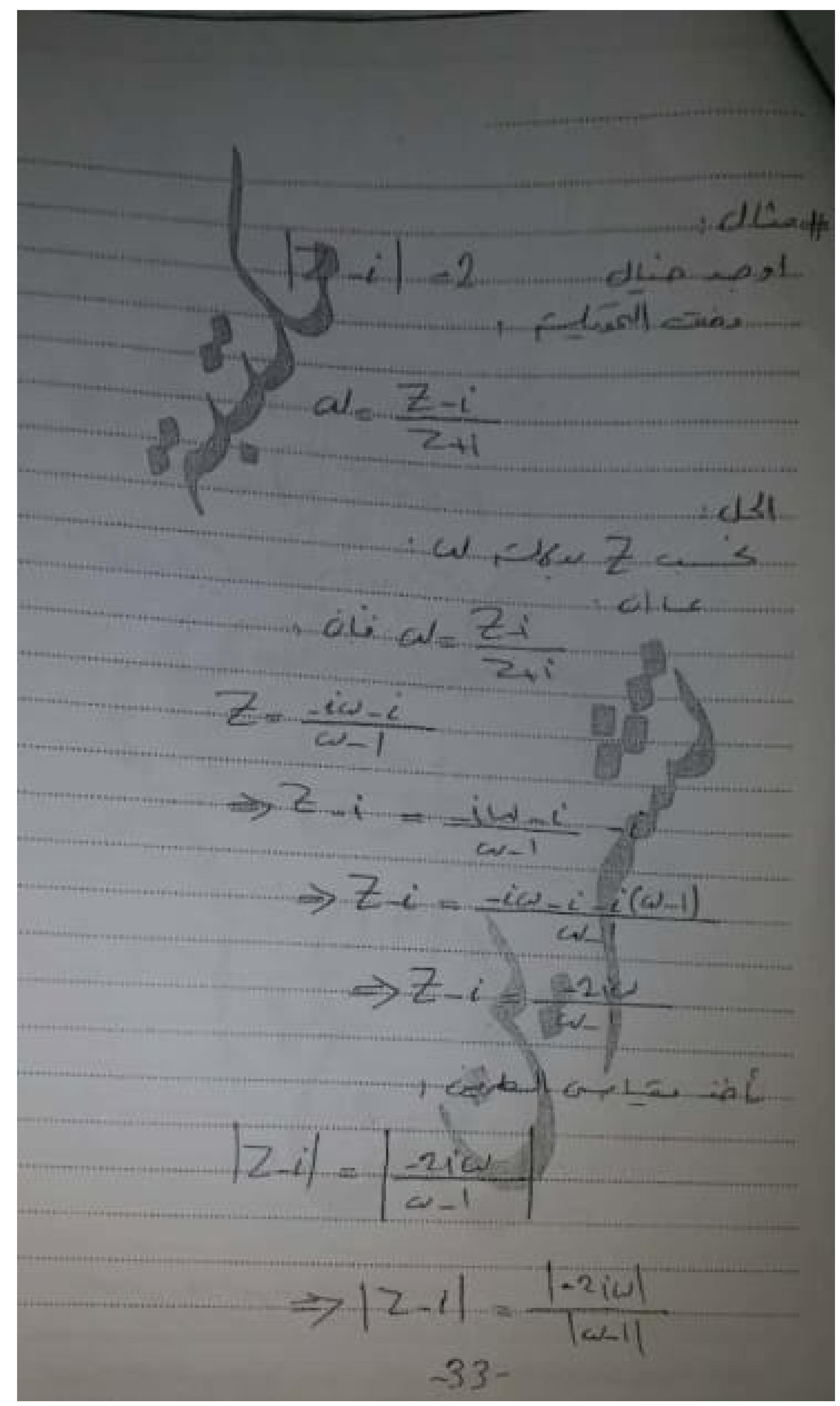


⇒ $w = \frac{a}{c} , \frac{cb-ad}{c}$ $z/$ — ③

إن التحويلة (١) هي تحويلة خطية كما نعلم
وبينا في محاضرة سابقة أن التحويلة الخطية العامة
تنقل الأشكال بشكل مشابه من المستوي
العقدي z إلى المستوي العقدي w أي المستطيل
هو مستطيل والمربع هو مربع لكن مع تمدد
أو تقلص أي استطالة لهذه الأشكال

أما التحويلة (٢) فقد قلنا سابقاً أنها تنقل الدوائر
من المستوي العقدي الممتد z إلى دوائر في المستوي
العقدي الممتد w كل مستقيم يمكن اعتباره
دائرة نصف قطرها لانهائي

كما لاحظنا التحويلة (٣) هي تحويلة خطية عامة
أي أنها تنقل الأشكال بشكل مشابه ومن هنا
نستنتج أن التحويلة الخطية الكسرية العامة
تنقل الدوائر من المستوي العقدي الممتد z إلى دوائر
في المستوي العقدي الممتد w مع الأخذ بعين الاعتبار
أن كل مستقيم هو عبارة عن دائرة نصف قطرها
اللانهائي



مثال:

اوجد صورة $|z-i|=2$

تحت التحويل،

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

الحل:

نجد z بدلالة w:

علماً

فإن $w=\frac{z-i}{z+i}$ ،

$$z=\frac{-iw-i}{w-1}$$

$$\Rightarrow z-i=\frac{-iw-i}{w-1}-i$$

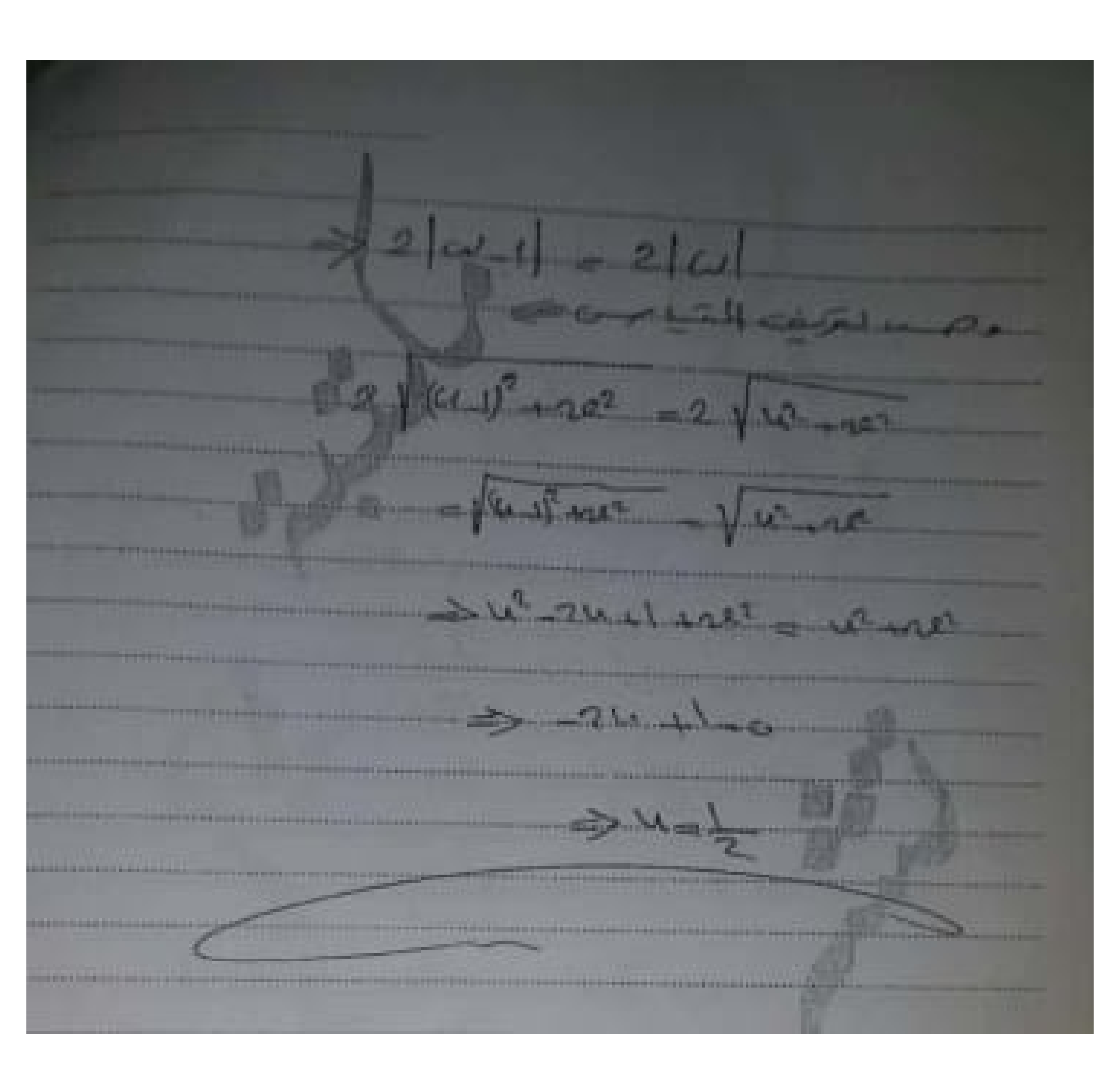
$$\Rightarrow z-i=\frac{-iw-i-i(w-1)}{w-1}$$

$$\Rightarrow z-i=\frac{-2iw}{w-1}$$

أخذ مقياس الطرفين،

$$|z-i|=\left|\frac{-2iw}{w-1}\right|$$

$$\Rightarrow |z-i|=\frac{|-2iw|}{|w-1|}$$



$\Rightarrow 2|w-1| = 2|w|$